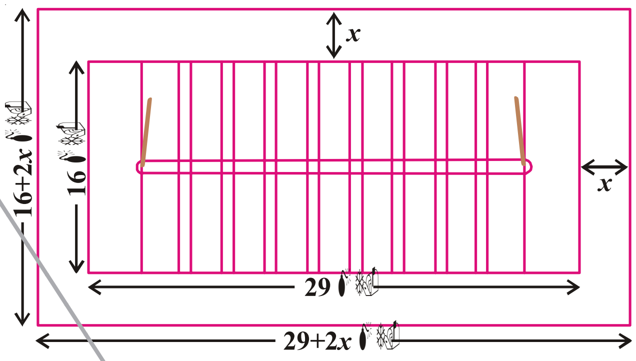
అధ్యాయము

5 వర్గ సమీకరణాలు
(Quadratic Equations)

5.1 పరిచయం

కస్బా పురపాలక పాఠశాల క్రీడల కమిటీ పాఠశాల ఆవరణలో 29 మీ. × 16 మీ. కొలతలతో ఒక ఖో–ఖో కోర్టును నిర్మించాలని భావించింది. ఇందుకుగాను వారికి 558 చ.మీ. వైశాల్యంగల ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలం అందుబాటులో వుంది. అందువల్ల వారు ఖో–ఖో కోర్టు చుట్టూ ప్రేక్షకుల కొరకు కొంత ఖాళీ స్థలమును కూడా వదలాలని భావించారు. అయితే ఇలా వదిలే ఖాళీ స్థలం యొక్క వెడల్పు కోర్టు చుట్టూ ఒకే విధంగా వుండేటట్లు వదిలితే దాని వెడల్పు ఎంత వుండాలి.



ఖాళీ స్థలము యొక్క వెడల్పు x మీ, అనుకొనిన పటం నుంచి దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క పొడవు = $(29 + 2x)$ మీ.

మరియు వెడల్పు $= (16 + 2x)$ మీ.

దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వైశాల్యము = పొడవు × వెడల్పు

$= (29 + 2x)(16 + 2x)$

అయితే ఈ స్థలము యొక్క వైశాల్యము = 558 మీ. అని ఇవ్వబడినది

$\therefore \quad (29 + 2x)(16 + 2x) = 558$

$\therefore \quad 4x^2 + 90x + 464 = 558$

$4x^2 + 90x - 94 = 0$

$2x^2 + 45x - 47 = 0$ (ఇరువైపులా 2తో భాగించగా)

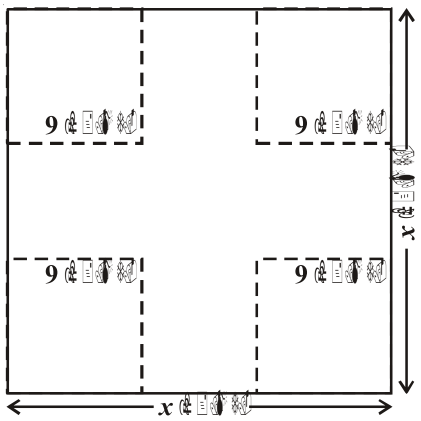
$2x^2 + 45x - 47 = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$

మనం క్రింది తరగతులలో $ax + b = c$ రూపంలో వున్న రేఖీయ సమీకరణాలను సాధించి x విలువను కనుగొన్నాం. అదేవిధంగా పై సమీకరణం (1)ని సాధించి x విలువను కనుగొనగలిగితే అది ప్రేక్షకుల కొరకు కేటాయించిన ఖాళీ స్థలం యొక్క వెడల్పును ఇస్తుంది.

మీరు ఇలాంటి సమీకరణాలు వచ్చే మరికొన్ని ఉదాహరణలను ఊహించగలరా?

మరియొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

రాణి వద్ద ఒక చతురస్రాకారపు లోహపు రేకు గలదు. పటంలో చూపిన విధంగా దీని నాలుగు మూలల నుంచి 9 సెం.మీ. భుజంగల చతురస్రాలను తొలగించి మిగిలిన భాగంతో ఒక మూతలేని పెట్టెను తయారుచేసింది. ఇలా తయారైన పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము 144 ఘ.సెం.మీ. అయిన మొదట తీసుకున్న లోహపు రేకు యొక్క భుజం పొడవును కనుగొనగలమా ?



చతురస్రాకారపు లోహపు రేకు భుజం పొడవు x సెం.మీ.

అనుకొనిన తయారుచేయబడిన పెట్టె యొక్క కొలతలు

9 సెం.మీ. $\times (x-18)$ సెం.మీ. $\times (x-18)$ సెం.మీ.

పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము 144 సెం.మీ

కనుక $9(x-18)(x-18) = 144$

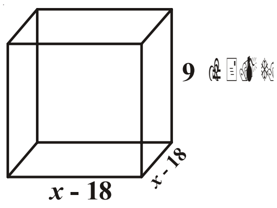
$(x-18)^2 = 16$

$x^2 - 36x + 308 = 0$ ..... (2)

అనగా పై సమీకరణమును తృప్తిపరచే 'x' విలువే మొదట తీసుకున్న లోహపు రేకు యొక్క భుజం అవుతుంది.

సమీకరణం (1) మరియు (2) లలోని LHS లను పరిశీలించండి?

అవి వర్గ బహుపదులేనా ?



$ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ రూపంలో వున్న ఇలాంటి వర్గ బహుపదులను గురించి మనము ఇంతకు ముందు అధ్యాయంలో చర్చించి యున్నాం.

(1) మరియు (2) సమీకరణాలలోని LHSలు వర్గ బహుపదులు కనుక ఈ సమీకరణాలను వర్గ సమీకరణాలు అంటాం.

ఈ అధ్యాయంలో వర్గ సమీకరణాలను గురించి వానికి సాధనలను కనుగొనే వివిధ పద్ధతులను గురించి చర్చిస్తాం.

5.2 వర్గ సమీకరణములు (Quadratic Equations)

a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలై $a \neq 0$ అయిన $ax^2 + bx + c = 0$ ను 'x' లో వర్గ సమీకరణము అంటాము. ఉదాహరణకి $2x^2 + x - 300 = 0$ ఒక వర్గ సమీకరణము. అదే విధంగా $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ మరియు $1 - x^2 + 300 = 0$ లు కూడా వర్గ సమీకరణాలే.

వాస్తవానికి $p(x)$ ఒక ద్విపరిమాణ బహుపది అవుతూ $p(x) = 0$ రూపంలో వున్న వానినన్నింటిని వర్గ సమీకరణాలు అంటాం. అయితే $p(x)$ లోని పదాలను వాని పరిమాణాల ఆధారంగా అవరోహణ క్రమంలో రాస్తే దానిని వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం అంటాం. అనగా $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ను వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం అంటాం మరియు $y = ax^2 + bx + c$ ను వర్గ ప్రమేయము అంటాము.

ప్రయత్నించండి

క్రింది సమీకరణాలు వర్గ సమీకరణాలో కాదో తెలపండి.

(i) $x^2 - 6x - 4 = 0$ (ii) $x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

(iii) $7x = 2x^2$ (iv) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

(v) $(2x + 1)(3x + 1) = b(x - 1)(x - 2)$ (vi) $3y^2 = 192$

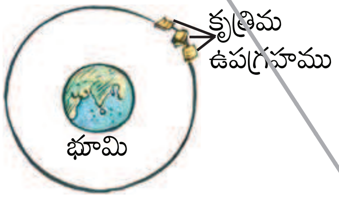
వర్గ సమీకరణాల/ప్రమేయాలు ఉపయోగాలు చాలా కలవు. వానిలో కొన్ని :

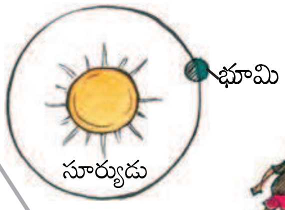
1. ప్రయోగించబడిన రాకెట్ యొక్క మార్గము, ఎత్తులు ఒక వర్గ సమీకరణం/ప్రమేయంచే నిర్వచించబడుతాయి.
2. ఉపగ్రహాల నుంచి సిగ్నల్స్‌ను స్వీకరించే డిష్ గొడుగుల ఆకారాలు, టెలిస్కోప్‌లలో వాడే పరావర్తన అద్దాల ఆకారాలు, కళ్ళజోడులో కటకాల ఆకారాలు, ఖగోళ వస్తువుల కక్ష్యా మార్గాలు వర్గ సమీకరణాలచే నిర్వచించబడుతాయి.

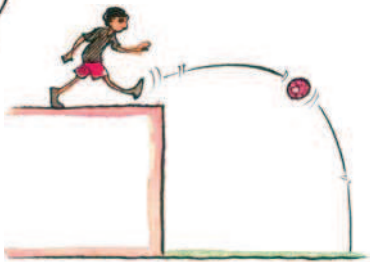
డిష్ గొడుగు

పరావర్తన అద్దము

కళ్లజోడులోని కటకాలు







3. ఒక ప్రక్షేపకము యొక్క మార్గము ఒక వర్గ సమీకరణంచే సూచించబడుతుంది.
4. ఒక వాహనమునకు బ్రేకులు వేసినపుడు అది ఆగే దూరమును గణించుటలో వర్గ సమీకరణం ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ-1. క్రింది వానికి సరియగు సమీకరణాలను రాయుము/కనుగొనుము.

i. రాజు మరియు రాజేందర్ ఇద్దరి వద్ద కలసి 45 గోళీలు కలవు. అయితే ఇద్దరూ చెరి 5 గోళీలను పోగొట్టుకున్నారు. ఇద్దరి వద్ద మిగిలిన గోళీల సంఖ్యల యొక్క లబ్ధము 124 అయిన ఇద్దరి వద్ద మొదట వున్న గోళీల సంఖ్యను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే సమీకరణమును కనుగొనుము/రాయుము.

ii. ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కర్ణము 25 సెం.మీ. మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవుల భేదము 5 సెం.మీ. అని ఇవ్వబడింది. అయిన మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవులను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే సమీకరణమును రాయుము?

సాధన : i. రాజు వద్ద గల గోళీల సంఖ్య 'x' అనుకొనిన

రాజేందర్ వద్ద గల గోళీల సంఖ్య $= 45 - x$ (ఎందుకు?).

5 గోళీలను పోగొట్టుకున్న తరువాత రాజు వద్ద వుండే గోళీల సంఖ్య $= x - 5$

అదేవిధంగా రాజేందర్ వద్ద వుండే గోళీల సంఖ్య $= (45 - x) - 5$

$= 40 - x$

$\therefore$ మిగిలిన గోళీల సంఖ్యల లబ్ధం $= (x - 5)(40 - x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= -x^2 + 45x - 200$

అనగా $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (దత్తాంశము)

$\therefore \quad -x^2 + 45x - 324 = 0$

$\therefore \quad x^2 - 45x + 324 = 0$ (ఇరువైపులా '–' చే గుణించగా)

అనగా $x^2 - 45x + 324 = 0$ సమీకరణమునకు తృప్తి పరచే 'x' విలువయే రాజు వద్ద మొదట వున్న గోళీల సంఖ్యను ఇస్తుంది.

$\therefore$ $x^2 - 45x + 324 = 0$ కావలసిన గణిత సమీకరణం అవుతుంది.

ii. చిన్న భుజము యొక్క పొడవును x సెం.మీ. అనుకొనిన

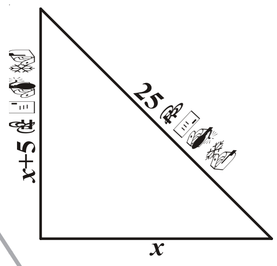
పెద్ద భుజం పొడవు $= (x + 5)$ సెం.మీ

ఇవ్వబడిన కర్ణము యొక్క పొడవు $= 25$ సెం.మీ.

లంబకోణ త్రిభుజములో

(భుజము)^2 + (భుజము)^2 = (కర్ణము)^2

అని మనకు తెలుసు.



కనుక $\quad x^2 + (x + 5)^2 = (25)^2$

$x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$

$2x^2 + 10x - 600 = 0$

$x^2 + 5x - 300 = 0$

పై సమీకరణంను సాధించుట ద్వారా పొందే x విలువ ఆధారంగా లంబకోణ త్రిభుజంలోని మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవులను గణించవచ్చు.

ఉదాహరణ-2. క్రిందివి వర్గసమీకరణాలేమో పరిశీలించండి.

i. $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ii. $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

iii. $x(2x + 3) = x^2 + 1$ iv. $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

సాధన : i. LHS $= (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

అనగా $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ని

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ గా రాయచ్చు.

$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$

రూపంలో వుంది కనుక ఇది ఒక వర్గ సమీకరణం.

ii. ఇచ్చుట LHS $= x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$

మరియు RHS $= (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

$\therefore\ x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$x^2 + x + 8 - x^2 + 4 = 0$

$\therefore\ x + 12 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో లేదు కనుక ఇది వర్గ సమీకరణం కాదు.

iii. ఇచ్చుట LHS $= x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

అనగా $x(2x + 3) = x^2 + 1$ ను

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ అని రాయవచ్చు.

అనగా $x^2 + 3x - 1 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో వుంది

కనుక ఇది ఒక వర్గ సమీకరణం.

iv. ఇచ్చుట, LHS $= (x + 2)^3$

$= (x + 2)^2 (x + 2)$

$= (x^2 + 4x + 4)(x + 2)$

$= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

కనుక, $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ ను

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ గా రాయవచ్చు.

$\Rightarrow 6x^2 + 12x + 12 = 0$ లేదా $x^2 + 2x + 2 = 0$

ఇది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో వుంది కనుక ఇది ఒక వర్గ సమీకరణం.

సూచన: పై ఉదాహరణ (ii)లో ఇచ్చిన సమీకరణం వర్గ సమీకరణం లాగా కనపడుతుంది. కానీ ఇది వర్గ సమీకరణం కాదు. అదే విధంగా ఉదాహరణ (iv)లో ఇచ్చిన సమీకరణం ఘన సమీకరణం లాగా కనపడుతుంది కానీ ఇది వర్గ సమీకరణమే.

పై ఉదాహరణల నుంచి ఇచ్చిన సమీకరణం వర్గ సమీకరణం అవును కాదో నిర్ణయించుటకు ముందు దానిని సూక్ష్మీకరించటము మంచిదని మనం గుర్తించగలం.

అభ్యాసము - 5.1

1. క్రింది సమీకరణాలు వర్గ సమీకరణాలు అవునో, కాదో నిర్ణయించండి.

i. $(x+1)^2 = 2(x-3)$ ii. $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

iii. $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ iv. $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

v. $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ vi. $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

vii. $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ viii. $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2. క్రింది వానికి సరియగు వర్గ సమీకరణాలను కనుగొనుము ?

i. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలము యొక్క వైశాల్యము 528 చ.మీ. దీని పొడవు, వెడల్పుయొక్క రెట్టింపు కంటే ఒక మీటరు ఎక్కువ అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుటకు అవసరమైన వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము?

ii. రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము 306. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము/రాయుము?

iii. రోహన్ తల్లి, రోహన్ కంటే 26 సం॥లు పెద్దది. 3 సం॥లు తరువాత వారిద్దరి వయస్సుల లబ్దం 360. అయిన రోహన్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సును కనుగొనుటకు అవసరమయ్యే వర్గసమీకరణమును రాయుము?

iv. 480 కి.మీ. దూరమును ఒక రైలు ఏకరీతి వేగముతో ప్రయాణిస్తుంది. ఒకవేళ ఇదే రైలు ఇప్పటి వేగం కంటే 8 కి.మీ తక్కువ వేగముతో ప్రయాణిస్తే గమ్యం చేరుటకు పట్టే కాలం 3 గం॥లు పెరుగుతుంది. అయిన రైలు వేగమును కనుగొనుటకు కావలసిన వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము?

5.3 కారణాంక పద్ధతిన వర్గ సమీకరణమును సాధించుట

నిజజీవితంలో జరిగే ఎదురయ్యే కొన్ని సంఘటనలను / సమస్యలను గణితపరంగా తెలియని చరరాశి 'x' ను ఉపయోగించి వర్గ సమీకరణాల రూపంలో ఎలా తెలియజేయవచ్చో మన నేర్చుకున్నాం. ఇపుడు x విలువను ఏవిధంగా కనుగొంటామో పరిశీలిద్దాం. $2x^2 - 3x + 1 = 0$ వర్గ సమీకరణమును తీసుకుందాం. దీనిలో x బదులు '1' ప్రతిక్షేపించిన $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 = \text{RHS}$. $x = 1$ కి సమీకరణం సంతృప్తి చెందినది కనుక $x = 1$ ను $2x^2 - 3x + 1 = 0$ కు మూలము లేదా సాధన అంటాం.

ఈ సమయంలో $x = 1$ అనునది $2x^2 - 3x + 1$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువ కూడా అవుతుందని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

సాధారణంగా $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$ కు $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ అయిన α ను వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలము అంటాం. మరియు $x = \alpha$ వర్గ సమీకరణం యొక్క సాధన అని కూడా అంటాం. లేదా 'α' వర్గ సమీకరణమును తృప్తి పరుస్తుంది అంటాం.

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యవిలువలు, $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలు ఒక్కటే అని గుర్తించగలరు.

3వ అధ్యాయంలో ఒక వర్గ బహుపదికి రెండు శూన్య విలువలుంటాయిని మనం గనించాం కనుక వర్గ సమీకరణమునకు కూడా రెండు మూలాలే వుంటాయి (ఎందుకు?)

మనం 9వ తరగతిలో మధ్య పదమును రెండింటిగా విడగొట్టుట ద్వారా ఒక వర్గ బహుపది యొక్క కారణాంకాలను ఎలా కనుగొనవచ్చో నేర్చుకున్నాము. ఇదే పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలను ఎలా కనుగొనవచ్చో చూద్దాం.

ఉదాహరణ-3. కారణాంక పద్ధతిన $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొనుము.

సాధన : మొదటగా మధ్యపదమును రెండింటిగా విడగొట్టుదాం. ax^2+bx+c ఒక వర్గ బహుపది అయితే మధ్య పదమును విడగొట్టుటకు $p + q = b$ మరియు $p \times q = a \times c$ అయ్యే విధంగా p, q అనే రెండు సంఖ్యలను కనుగొనాలని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. అంటే $2x^2 - 5x + 3$ లో మధ్యపదమును విడగొట్టుటకు $p + q = b = -5$ మరియు $p \times q = a \times c = 2 \times 3 = 6$ అయ్యే విధంగా p, q అనే రెండు సంఖ్యలను కనుగొనాలి.. దీనికొరకు 6 యొక్క కారణాంకాల జతల జాబితాను తయారుచేద్దాం. అవి $(1, 6), (-1, -6); (2, 3); (-2, -3)$. ఈ జాబితాలో $(-2, -3)$; అనే జత $p + q = -5$ మరియు $p \times q = 6$ లను తృప్తి పరుస్తుందని గుర్తించగలం. కనుక మధ్యపదము '$-5x$' ను '$-2x - 3x$' గా రాయవచ్చు.

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$$

అనగా $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ను $(2x - 3)(x - 1) = 0$ గా రాయవచ్చు.

అనగా $2x - 3 = 0$ లేదా $x - 1 = 0$.

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ మరియు $x = 1$ లు ఇచ్చిన వర్గసమీకరణం యొక్క సాధనలు

లేదా 1 మరియు $\frac{3}{2}$ లు $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలు.

ప్రయత్నించండి.

1 మరియు $\frac{3}{2}$ లు $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలవుతాయేమో సరిచూడండి.

ఇచ్చట $2x^2 - 5x + 3$ ను రెండు రేఖీయ కారణాంకాల లబ్దంగా రాసి ప్రతీ రేఖీయ కారణాంకాన్ని సున్నాకు సమానం చేయటం ద్వారా $2x^2 - 5x + 3 = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొన్నామని గమనించండి.

ఉదాహరణ-4 : $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలను కనుగొనుము ?

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము : $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$
$$= 3x\,(2x + 1) - 2\,(2x + 1)$$
$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

అనగా $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ అయ్యే విధంగా వున్న x విలువలే $6x^2 - x - 2 = 0$ యొక్క మూలాలవుతాయి.

$\therefore\ 3x - 2 = 0$ లేదా $2x + 1 = 0,$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ లేదా $x = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ 6x^2 - x - 2 = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{2}{3}$ మరియు $-\frac{1}{2}$.

$6x^2 - x - 2 = 0$ లో $x = \frac{2}{3}$ మరియు $x = -\frac{1}{2}$ లను ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించుట ద్వారా అవి సమీకరణమునకు మూలాలు అవుతాయో లేవో సరిచూడగలము.

ఉదాహరణ-5. శీర్షిక 5.1 లో చర్చించిన సమస్యలోని ప్రేక్షకుల కొరకు వదిలిన ఖాళీ స్థలము యొక్క వెడల్పును కనుగొనుము ?

సాధన : 5.1 శీర్షికలో చర్చించిన సమస్యలోని ప్రేక్షకుల కొరకు వదిలిన ఖాళీ స్థలము యొక్క వెడల్పు x మీ అనుకొనిన అది $2x^2 + 45x - 47 = 0$ ను తృప్తి పరిచే ఒక విలువ. కారణాంక పద్ధతిని ఈ సమీకరణంనకు అనువర్తింపచేసిన

$$2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$$
$$2x\,(x - 1) + 47\,(x - 1) = 0$$

i.e., $(x - 1)\ (2x + 47) = 0$

అనగా $x = 1$ మరియు $x = \frac{-47}{2}$ లు $2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$ యొక్క మూలాలు. అయితే x అనేది ప్రేక్షకుల కొరకు వదిలిన ఖాళీ స్థలము యొక్క వెడల్పు కనుక దీని విలువ ఋణాత్మకం కాజాలదు

$\therefore$ ఖాళీ స్థలం యొక్క వెడల్పు $= x = 1$ మీ.

అభ్యాసము- 5.2

1. కారణాంక పద్ధతిన క్రింది వర్గ సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము ?

i. $x^2 - 3x - 10 = 0$ ii. $2x^2 + x - 6 = 0$ iii. $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

iv. $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ v. $100x^2 - 20x + 1 = 0$ vi. $x(x + 4) = 12$

vii. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ viii. $x - \frac{3}{x} = 2$ ix. $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

2. మొత్తము 27, లబ్ధము 182 అయ్యే విధంగా రెండు సంఖ్యలను కనుగొనుము.

3. రెండు వరుస ధన పూర్ణ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము 613 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

4. ఒక లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు దాని భూమి కంటే 7 సెం.మీ. తక్కువ. కర్ణము పొడవు 13 సెం.మీ అయిన మిగిలిన రెండు భుజాలను కనుగొనుము.

5. ఒక కుటీర పరిశ్రమలో ప్రతిరోజు ఒక నియమిత సంఖ్యలో వస్తువులను తయారు చేస్తారు. ఒక రోజు; తయారైన ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదు (రూపాయిలలో) ఆరోజు తయారైన వస్తువుల సంఖ్యకు రెట్టింపు కంటే 3 ఎక్కువ. ఆ రోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల ఖరీదు ₹ 90 అయిన ఆ రోజు తయారైన మొత్తం వస్తువుల సంఖ్య మరియు ఒక్కొక్క వస్తువు ఖరీదును కనుగొనుము?

6. ఒక దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత 28 మీ మరియు దాని వైశాల్యం 40 చ.మీ. అయిన దీర్ఘచతురస్రము యొక్క కొలతలను కనుగొనుము?

7. ఒక త్రిభుజము యొక్క భూమి, దాని ఎత్తు కంటే 4 సెం.మీ.ఎక్కువ. ఈ త్రిభుజ వైశాల్యము 48 చ.సెం.మీ. అయిన దాని భూమిని, ఎత్తును కనుగొనుము?

8. రెండు రైళ్లు ఒక స్టేషన్ నుంచి ఒకే సమయంలో ఒకటి పడమరకు మరిఒకటి ఉత్తరం వైపుకు బయలుదేరును. మొదటి రైలు, రెండవ రైలు కంటే 5 కి.మీ./గంట ఎక్కువ వేగంతో ప్రయాణిస్తుంది. అవి బయలుదేరిన రెండు గంటల తరువాత ఒకదానికొకటి 50 కి.మీ. దూరంలో వున్న ఒక్కొక్క రైలు సగటు వేగం ఎంత?

9. 60 మంది విద్యార్థులు గల తరగతిలో ప్రతి అబ్బాయి, అమ్మాయిల సంఖ్యకు సమానమైన సొమ్మును, ప్రతి అమ్మాయి, అబ్బాయిల సంఖ్యకు సమానమైన సొమ్మును చందాగా ఇచ్చారు. మొత్తం వసూలైన సొమ్ము ₹ 1600 అయిన తరగతిలో ఎంత మంది అబ్బాయిలు గలరు ?

10. గంటకు 3 కి.మీ వేగంతో ప్రయాణిస్తున్న ఒక నదిలో ఒక మోటారు బోటు 24కి.మీ. దూరమును ప్రయాణించి తిరిగి బయలుదేరిన స్థానానికి రావడానికి పట్టిన కాలం 6 గంటలైన బోటు స్థిరవేగంలో ప్రయాణించినదని భావించి దాని వేగమును కనుగొనుము?

5.4 వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా వర్గ సమీకరణమును సాధించుట

ఇంతకుముందు మనము ఒక వర్గ సమీకరణమును కారణాంక పద్ధతిన ఎలా సాధించవచ్చో తెలుసుకున్నాము. అయితే ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి అన్ని సమీకరణాలను సాధించగలమా ? $x^2 + 4x - 4 = 0$ ను కారణాంక పద్ధతిని సాధించుటకు ప్రయత్నిద్దాం. ఇచ్చిన వర్గసమీకరణము $x^2 + 4x - 4 = 0$ ను కారణాంక పద్ధతిన సాధించవలెనన్న మొదట మనము

$p + q = 4$; $p \times q = -4$ అయ్యే విధంగా p, q విలువలను కనగొనవలెను. అయితే ఇది సాధ్యం కాదు.

కనుక $x^2 + 4x - 4 = 0$ ను కారణాంక పద్ధతిని సాధించలేము. అందువల్ల మనము ఇంకొక వేరే పద్ధతిని పరిశీలించవలసి వున్నది.

క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాం.

రెండు సంవత్సరాల క్రితం సునీత వయస్సు, మరియు 4సం॥ల అనంతరము ఆమె వయస్సుల లబ్ధం, ఆమె ప్రస్తుత వయస్సుకు రెట్టింపు కంటే '1' ఎక్కువ అయిన ఆమె ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?

దీనికి జవాబును కనుగొనుటకు ఆమె ప్రస్తుత వయస్సును 'x' సం॥లు అనుకుందాం. అయిన రెండు సం॥ల క్రితం ఆమె వయస్సు = $(x - 2)$ సం॥లు మరియు 4సం॥ల అనంతరం ఆమె వయస్సు $= (x + 4)$ సం॥లు.

దత్తాంశము ప్రకారము $(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

$\therefore \quad x^2 - 9 = 0$

అనగా $x^2 - 9 = 0$ ను తృప్తి పరచే x విలువే సునీత యొక్క ప్రస్తుత వయస్సును ఇస్తుంది. ఈ సమీకరణంను $x^2 = 9$ గా రాయవచ్చు. ఇరువైపులా వర్గమూలములను తీసుకోవడం ద్వారా $x = 3$ లేదా $x = -3$ లను పొందవచ్చు. అయితే వయస్సు ధనాత్మకం కనుక $x = 3$ ను మాత్రమే పరిగణలోనికి తీసుకుంటాం.

అనగా సునీత వయస్సు 3 సం॥లు

ఇపుడు $(x + 2)^2 - 9 = 0$ అనే మరొక వర్గ సమీకరణమును పరిశీలిద్దాం.

$(x + 2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 9.$

$\therefore \quad x + 2 = 3$ లేదా $x + 2 = -3.$

$\therefore \quad x = 1$ లేదా $x = -5$

అనగా $(x + 2)^2 - 9 = 0$ యొక్క మూలాలు 1 మరియు -5.

పై రెండు ఉదాహరణలలోని x కలిగిన పదాలు ఖచ్చిత వర్గాల రూపంలో వున్నాయి. కావున ఇరువైపులా వర్గ మూలాలను తీసుకోవడం ద్వారా సులభంగా వానిని సాధించాం. అయితే ఇదే పద్ధతిన $x^2 + 4x - 4 = 0$ ను సాధించగలమా? ఇంకా ఈ సమీకరణమును కారణాంక పద్ధతిని కూడా సాధించలేము. కనుక దీనిని ఒక ఖచ్చిత వర్గరూపంలోకి మార్చిసాదిద్దాం. ఈ పద్ధతినే వర్గంను పూర్తి చేయుట ద్వారా వర్గసమీకరణమును సాధించడంగా పిలుస్తాం. సమీకరణం యొక్క ఎడమ భాగము ఒక సంపూర్ణ వర్గము అయ్యే విధంగా మార్చుటయే ఈ పద్ధతిలోని మెళుకువ/ఉపాయము.

ఈ పద్ధతి ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

$x^2 + 4x - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4x = 4$

$x^2 + 2.x.2 = 4$

ఇపుడు సమీకరణం యొక్క ఎడమభాగము $a^2 + 2ab$ రూపంలో వుంది. దీనికి b^2 ను కలిపితే అది $a^2 + 2ab + b^2$ అయి ఒక సంపూర్ణ / ఖచ్చిత వర్గము అవుతుంది. కనుక సమీకరణంనకు ఇరువైపులా $b^2 = 2^2 = 4$ ను కలుపగా

$$x^2 + 2.x.2 + 2^2 = 4 + 4$$

$$\Rightarrow \quad (x + 2)^2 = 8 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \quad x = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

ఇప్పుడు ఇంకొక వర్గసమీకరణము $3x^2 - 5x + 2 = 0$ను తీసుకుందాం. దీనిలో x^2 గుణకము '1' కాదు. x^2 గుణకము '1' గా పొందుటకు సమీకరణం మొత్తాన్ని ఇరువైపులా '3' చే భాగిద్దాం.

$$\therefore \quad x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$ (ఇరువైపులా $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ను కలుపగా)

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{(12 \times -2) + (25 \times 1)}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$$ (ఇరువైపులా వర్గమూలమును తీసుకొనగా)

అనగా, $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ లేదా $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

$\therefore \quad x = 1$ లేదా $x = \frac{4}{6}$

$\Rightarrow \quad x = 1$ లేదా $x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క మూలాలు = 1 మరియు $\frac{2}{3}$.

పై ఉదాహరణ నుంచి ఈ పద్ధతికి అవసరమయ్యే అల్‌గారిథమ్‌ను క్రింది విధంగా రూపొందించుకోవచ్చు.

అల్‌గారిథమ్ : ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణమును $ax^2 + bx + c = 0$ అనుకొనుము.

సోపానం-1 : సమీకరణమును ఇరువైపులా 'a' చే భాగించుము.

సోపానం-2 : స్థిరపదము $\frac{c}{a}$ ను కుడివైపునకు తీసుకొనిరమ్ము.

సోపానం-3 : ఎడమ భాగము ఒక సంపూర్ణ/ ఖచ్చిత వర్గమవుటకు సమీకరణమునకు ఇరువైపులా $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$ ను కూడుము.

సోపానం-4 : ఎడమ భాగాన్ని వర్గంగా రాసి కుడిభాగాన్ని సూక్ష్మీకరించుము.

సోపానం-5 : సాధించుము.

ఉదాహరణ-6. వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా వర్గ సమీకరణమును సాధించే పద్ధతి ద్వారా $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ను సాధించుము.

సాధన : ఇవ్వబడిన సమీకరణము : $5x^2 - 6x - 2 = 0$

పై అల్‌గారిథమ్ ఆధారంగా దీనిని సాదిద్దాం.

సోపానం-1 : $x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (ఇరువైపులా 5చే భాగించగా)

సోపానం-2 : $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$

సోపానం-3 : $x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$ (ఇరువైపులా $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ ను కూడగా)

సోపానం-4 : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$

సోపానం-5 : $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$$x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$$

$$x = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{or} \quad x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{3 + \sqrt{19}}{5} \quad \text{or} \quad x = \frac{3 - \sqrt{19}}{5}$$

ఉదాహరణ-7. $4x^2 + 3x + 5 = 0$ ను వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా సాధించుము.

సాధన : ఇవ్వబడిన సమీకరణం $4x^2 + 3x + 5 = 0$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{-5}{4}$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \frac{9}{64}$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-71}{64} < 0$$

అయితే x యొక్క ఏ వాస్తవ విలువకైన $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2$ ఋణాత్మకం కాదు(ఎందుకు?) అనగా x యొక్క ఏ వాస్తవ విలువనైనా పై సమీకరణంను తృప్తి పరచదు. కనుక ఇచ్చిన సవమీకరణమునకు వాస్తవ మూలాలు లేవు.

ఇవి చేయండి.

వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా క్రింది వర్గ సమీకరణాలను సాధించుము.

(i) $x^2 - 10x + 9 = 0$ (ii) $x^2 - 5x + 5 = 0$

(iii) $x^2 + 7x - 6 = 0$

మనం ఇప్పటి వరకూ వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా అనేక వర్గ సమీకరణాలను సాధించాం. ఇపుడు ఇదే పద్ధతిని ప్రామాణిక వర్గ సమీకరణ రూపమైన $ax^2+bx+c=0$ కు అనువర్తింపచేసి దానిని సాదిద్ధాం.

సోపానం-1 : $ax^2+bx+c=0$ (ఇరువైపులా a చే భాగించగా)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

సోపానం-2 : $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

సోపానం-3 : $x^2 + \frac{b}{a}x + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2 = -\frac{c}{a} + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ (ఇరువైపులా $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$ ను కూడగా)

$$\Rightarrow x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

సోపానం-4 : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

సోపానం-5 : $b^2 - 4ac \geq 0$ అనుకొని ఇరువైపులా వర్గమూలాలమును తీసుకొనగా

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\therefore$ $b^2 - 4ac \geq 0$ అయినపుడు $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ మరియు $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

ఒకవేళ $b^2 - 4ac < 0$ అయిన సమీకరణంనకు వాస్తవ మూలాలు వుండవు (ఎందుకు ?)

కనుక $\boldsymbol{b^2 - 4ac \geq 0}$ అయినపుడు $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ యొక్క మూలాలు $\boldsymbol{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$.

పై సూత్రమును ఉపయోగించి ఏ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలనైనా సులభంగా కనుగొనవచ్చు. కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-8. అభ్యాసము 5.1 లోని 2(i) వ ప్రశ్నను పై సూత్రమును ఉపయోగించి సాధించుము.

సాధన : దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలం యొక్క వెడల్పు 'x' మీ. అనుకొనిన

దాని పొడవు = $(2x + 1)$ మీ.

దాని వైశాల్యము 528 చ.మీ. కనుక

$$x(2x + 1) = 528,$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + x - 528 = 0.$$

ఈ సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో కలదు. ఇచ్చట $a = 2, b = 1, c = -528$.

పై సూత్రం నుంచి

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$\therefore \quad x = \frac{64}{4}$ లేదా $x = \frac{-66}{4}$

$\Rightarrow \quad x = 16$ లేదా $x = -\frac{33}{2}$

వెడల్పు ఋణాత్మకం కాదు కనుక $x = 16$ ను పరిగణలోనికి తీసుకుంటాం.

$\therefore$ వెడల్పు = $x = 16$ మీ.

మరియు పొడవు = $(2x + 1) = 33$మీ.

సమస్యలోని షరతుల ఆధారంగా ఈ సాధనలు సరియైనవవో, కావో మీరు సరిచూడవచ్చు.

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

ఒక వర్గ సమీకరణమును సాధించుటకు పై మూడు పద్ధతులలో నీవు ఏ పద్ధతిని ఉపయోగిస్తావు? ఎందుకు?

ఉదాహరణ-9. రెండు వరుస ధన బేసిసంఖ్యల మొత్తము 290 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన : మొదటి బేసి సంఖ్యని 'x' అనుకొనిన రెండవ బేసిసంఖ్య $(x + 2)$ అవుతుంది.

$\therefore \quad x^2 + (x+2)^2 = 290$

అంటే $\quad x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$

అంటే $\quad 2x^2 + 4x - 286 = 0$

అంటే $\quad x^2 + 2x - 143 = 0$

ఇది x లో ఒక వర్గ సమీకరణము.

$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ సూత్రం ప్రకారం

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$\therefore \quad x = 11$ లేదా $x = -13$

అయితే x ఒక ధన బేసి సంఖ్య కనుక $x = 11$

$\therefore \quad x + 2 = 11 + 2 = 13.$

$\therefore$ రెండు వరుస ధన బేసి సంఖ్యలు = 11, 13

సరిచూచుట : $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290.$

ఉదాహరణ-10. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు తయారు చేయబడుతుంది. దీని వెడల్పు, పొడవు కంటే 3 మీ. తక్కువ. దీని వైశాల్యము, దీని వెడల్పుకు సమానమైన భూమి మరియు 12 మీ. ఎత్తు గల ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజ వైశాల్యం కంటే 4 చ.మీ. ఎక్కువ. అయిన దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కు యొక్క పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము ?

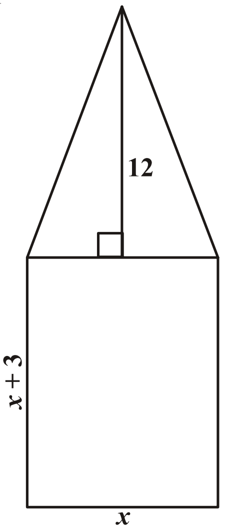
సాధన : దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు వెడల్పు x మీ. అనుకొనిన

పొడవు $= (x + 3)$ మీ.

$\therefore$ దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు వైశాల్యము $= x(x + 3)$ చ.మీ. $= (x^2 + 3x)$ చ.మీ.

సమద్విబాహు త్రిభుజము యొక్క భూమి $= x$ మీ.

$\therefore$ సమద్విబాహు త్రిభుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x$ చ.మీ.



అయితే దత్తాంశము ప్రకారము

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

$$\therefore \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$\therefore$ సూత్రం నుంచి

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ లేదా } -1$$

అయితే $x \neq -1$ (ఎందుకు?) కనుక $x = 4$.

$\therefore$ దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు వెడల్పు = 4మీ.

మరియు పొడవు $x + 3 = 4 + 3 = 7$మీ.

సరిచూచుట **:** దీర్ఘ చతురస్రాకార పార్కు వైశాల్యము = 28 చ.మీ.

త్రిభుజ వైశాల్యము = 24 మీ^{2} = (28 – 4) చ.మీ.

ఉదాహరణ-11. క్రింది వర్గ సమీకరణాలకు మూలాలు వుంటే వానిని సూత్రము ద్వారా కనుగొనుము ?

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (ii) $2x^2 - 2\sqrt{2x} + 1 = 0$

సాధన :

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ ఇచ్చట $a = 1, b = 4, c = 5$. కనుక $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$.

ఏ వాస్తవ సంఖ్య యొక్క వర్గమైననూ ఋణాత్మకము కానేరదు కనుక $\sqrt{b^2 - 4ac}$ వాస్తవ విలువలను కలిగి యుండదు.

$\therefore$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలాలు లేవు.

(ii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$. ఇచ్చట $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$.

$\therefore \quad b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$

$\therefore \quad x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\therefore$ మూలాలు $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}.$

ఉదాహరణ-12. క్రింది సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము.

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, \; x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, \; x \neq 0, 2$

సాధన :

(i) $x + \frac{1}{x} = 3$. సమీకరణం మొత్తమును x చే గుణించిన

$x^2 + 1 = 3x$

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0$

ఇచ్చుట $a = 1, b = -3, c = 1$ కనుక

$b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

$\therefore \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (ఎందుకు ?)

$\therefore \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ మరియు $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ లు మూలాలు.

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, \; x \neq 0, 2.$

$x \neq 0, 2,$ కనుక $x(x-2)$ చే సమీకరణం ఇరువైపులా గుణించిన

$(x-2) - x = 3x(x-2)$

$= 3x^2 - 6x$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0$

ఇచ్చుట $a = 3, b = -6, c = 2$. కనుక, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

$\therefore \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$

$\therefore$ మూలాలు $= \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ మరియు $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$.

ఉదాహరణ-13. నిశ్చల నీటిలో ఒక మోటారు బోటు యొక్క వేగము గంటకు 18 కి.మీ. నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా 24 కి.మీ. ప్రయాణించుటకు పట్టే కాలము, తిరిగి బయలుదేరిన స్థానమునకు వచ్చుటకు పట్టే కాలం కంటే 1 గంట ఎక్కువ. అయిన నీటి వేగమెంత ?

సాధన : నీటి వేగము గంటకు x కి.మీ. అనుకొనిన

నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా పోవునపుడు బోటు వేగము $= (18-x)$ కి.మీ.

మరియు తిరుగు ప్రయాణంలో బోటు వేగము $= (18+x)$ కి.మీ.

నీటి ప్రవాహమునకు ఎదురుగా పోవునపుడు పట్టే కాలము = [illegible] $= \dfrac{24}{18-x}$ గం॥

తిరుగు ప్రయాణంనకు పట్టే కాలము $= \dfrac{24}{18+x}$ గంటలు.

దత్తాంశము ప్రకారం

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

$\Rightarrow \quad 24(18+x) - 24(18-x) = (18-x)(18+x)$

$\Rightarrow \quad x^2 + 48x - 324 = 0$

$\therefore$ సూత్రము నుంచి

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ లేదా } -54$$

నీటి ప్రవాహము యొక్క వేగము ఋణాత్మకము కానేరదు కావున $x = 6$

అనగా నీటి ప్రవాహము యొక్క వేగము = 6 కి.మీ/గంట.

అభ్యాసము - 5.3

1. క్రింది సమీకరణాలకు మూలాలు వుండే వానిని వర్గంను పూర్తి చేయుట ద్వారా కనుగొనుము.

i. $2x^2 + x - 4 = 0$

ii. $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

iii. $5x^2 - 7x - 6 = 0$

iv. $x^2 + 5 = -6x$

2. సూత్రమును ఉపయోగించి 1వ ప్రశ్నలోని సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము ?

3. క్రింది సమీకరణాల మూలాలను కనుగొనుము ?

(i) $x-\frac{1}{x}=3,\ x\neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30},\ x\neq -4,7$

4. 3 సం॥ల క్రితము రహమాన్ వయస్సు యొక్క వ్యుత్క్రమము, 5 సం॥ల తరువాత అతని వయస్సు యొక్క వ్యుత్క్రమముల మొత్తము $\frac{1}{3}$ అయిన అతని ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత ?

5. మౌళికకు గణితములో మరియు ఇంగ్లీషులో వచ్చిన మార్కుల మొత్తము 30. ఆమెకు ఒకవేళ గణితంలో 2 మార్కులు ఎక్కువగా, ఇంగ్లీషులో 3 మార్కులు తక్కువగా వచ్చి వుంటే ఆ రెండింటి యొక్క లబ్ధము 210 అయి వుండేది. అయిన ఆమెకు రెండు సబ్జక్టులలో వచ్చిన మార్కులను కనుగొనుము?

6. ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము యొక్క కర్ణము దాని వెడల్పు కంటే 60 మీ ఎక్కువ మరియు పొడవు, వెడల్పు కంటే 30 మీ. ఎక్కువ అయిన దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలము యొక్క కొలతలను కనుగొనుము?

7. రెండు సంఖ్యల వర్గాల భేదము 180. చిన్న సంఖ్య యొక్క వర్గము, పెద్దదానికి 8 రెట్లు అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము?

8. ఒక రైలు 360 కి.మి దూరమును ఏకరీతి వేగముతో ప్రయాణించును. దీని వేగము గంటకు 5 కి.మీ. పెరిగిన అదే దూరమును ప్రయాణించుటకు పట్టు కాలము 1 గంట తగ్గును. అయిన రైలు వేగమును కనుగొనుము?

9. రెండు కుళాయిలు కలిసి ఒక నీళ్ల ట్యాంకును $9\frac{3}{8}$ గం॥లలో నింపును. ఎక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి ఒక్కటే, తక్కువ వ్యాసమున్న కుళాయి నింపే సమయమునకు 10 గం॥ తక్కువ సమయంలో నింపును. అయితే ఒక్కొక్క కుళాయి విడివిడిగా ట్యాంకును నింపుటకు పట్టే కాలమును కనుగొనుము?

10. మైసూరు, బెంగుళూరు మధ్య 132 కి.మీ. దూరమును ప్రయాణించుటకు ఒక ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు, ప్యాసింజర్ రైలు కంటే 1 గంట సమయము తక్కువ తీసుకొంటుంది. (మధ్యలో ఆగే సమయాలను లెక్కలోకి తీసుకోలేదు) ఎక్స్‌ప్రెస్ రైలు సగటు వేగము, ప్యాసింజర్ రైలు వేగం కంటే 11కి.మీ / గంట ఎక్కువ అయిన రెండు రైళ్ల వేగాలను కనుగొనుము.

11. రెండు చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం 468 చ.మీ వాని చుట్టు కొలతల బేధము 24 మీ. అయిన ఆ రెండు చతురస్రాల భుజాలను కనుగొనుము?

12. 96 మీ. ఎత్తుగల ఒక ఇంటి పై భాగం నుంచి 80మీ/సెకను తొలి వేగముతో పైకి విసిరి వేయబడింది. 't' సెకన్ల తరువాత దానికి భూమికి మధ్యగల దూరము $S = 96 + 80t - 16t^2$. అయితే అది ఎన్ని సెకన్ల తరువాత భూమిని తాకుతుంది.

13. 'n' భుజాలుగల ఒక బహుభుజి లోని కర్ణాల సంఖ్య $\frac{1}{2}n(n-3)$. అయితే 65 కర్ణాలు గల బహుభుజి యొక్క భుజాల సంఖ్య ఎంత? 50 కర్ణాలు గల బహుభుజి వ్యవస్థితమౌతుందా ?

5.5 మూలాల స్వభావము

$ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

అని మనము ఇంతకు ముందు భాగంలో తెలుసుకున్నాం. ఇపుడు వీని యొక్క స్వభావమును అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

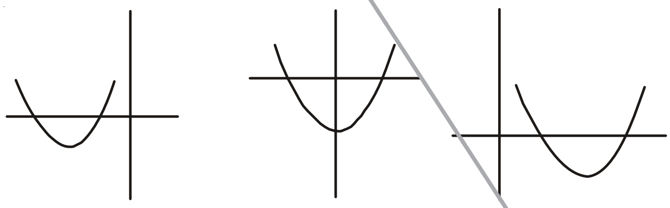
భాగం-1 : $b^2 - 4ac > 0$ అయిన రెండు వేరు వేరు మూలాలుండును. అవి

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

బహుపది శూన్యవిలువలనగా బహుపది విలువ శూన్యం అయ్యే విలువలని అర్థము. మరియు ఆ బహుపదికి గ్రాఫ్ గీస్తే అది X-అక్షమును ఖండించే విలువలని కూడా గుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

అదే విధంగా ఒక వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలంటే ఆ వర్గ సమీకరణమునకు గ్రాఫ్ గీస్తే అది X-అక్షంను ఖండించే విలువలని గుర్తించండి.

$b^2 - 4ac > 0$ అయిన సమయంలో ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణమునకు గ్రాఫ్ గీస్తే మనం క్రింది పటాలను పొందగలం.

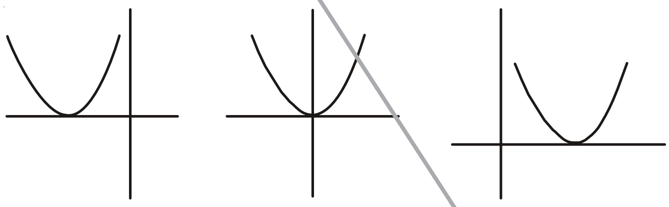


పటాల నుంచి వక్రము X-అక్షమును రెండు వేరు వేరు బిందువుల వద్ద తాకుతుందని గమనించగలరు.

భాగం-2 : $b^2 - 4ac = 0$ అయిన

$$x = \frac{-b + 0}{2a}$$

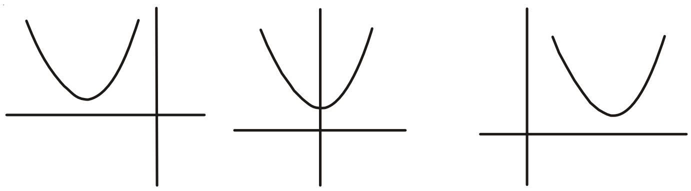
$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$$



పటాల నుంచి వక్రము X-అక్షమును ఒకే బిందువు వద్ద తాకుతుందని గమనించగలరు.

భాగం-3 : $b^2 - 4ac < 0$

అయిన మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు. సంకీర్ణ సంఖ్యలు.



ఈ సమయంలో గీయబడిన వక్రము X-అక్షంను తాకకపోవటం గమనించగలరు.

$b^2 - 4ac$ అనేది $ax^2 + bx + c = 0$ కు వాస్తవ మూలాలు వుంటాయో లేదో నిర్ణయించుటకు తోడ్పడుతుంది. కనుక దీనిని వర్గ సమీకరణం యొక్క విచక్షణి అంటాం.

అనగా $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం

i. $b^2 - 4ac > 0$ అయిన రెండు వేరు వేరు వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.

ii. $b^2 - 4ac = 0$ అయిన రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది.

iii. $b^2 - 4ac < 0$ అయిన వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుండదు.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-14. $2x^2 - 4x + 3 = 0$ యొక్క విచక్షణిని కనుగొని తద్వారా మూలాల స్వభావమును చర్చించుము.

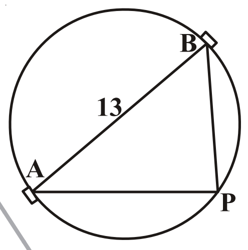
సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో వుంది. ఇచ్చట $a = 2$, $b = -4$; $c = 3$ కనుక విచక్షణ

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణం వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుండదు.

ఉదాహరణ-15. 13 సెం.మీ. వ్యాసం గల ఒక వృత్తాకార పార్కు సరిహద్దు మీద ఒక స్తంభమును ఏర్పాటు చేయాలనుకున్నారు. పార్కు యొక్క సరిహద్దు మీద ఎదురెదురుగా అనగా ఒక వ్యాసం యొక్క చివరి బిందువుల వద్ద ఏర్పాటు చేయబడిన A మరియు B అనే రెండు గేట్ల నుంచి ఈ స్తంభము వరకూ గల దూరాల బేధము 7 మీ. వుండునట్లు స్తంభమును ఏర్పాటు చేయగలమా? ఒకవేళ చేయగలిగితే రెండు గేట్ల నుంచి ఈ స్తంభం ఎంత దూరంలో వుంటుంది?

సాధన : ముందుగా తగిన చిత్రాన్ని గీద్దాం.



స్తంభమును ఏర్పాటు చేసే బిందువు P అనుకుందాం. B గేటు నుంచి P వరకూ గల దూరమును x మీ. అనుకుందాం. అనగా $BP = x$ మీ. దత్తాంశము ప్రకారము AP, BP ల మధ్య భేదము 7మీ. కనుక $AP = x + 7$ మీ అవుతుంది

AB = 13మీ, మరియు AB వ్యాసం కనుక

$\angle APB = 90^0$ (ఎందుకు?)

$\therefore$ పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము $AP^2 + PB^2 = AB^2$

$\Rightarrow \quad (x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

$\therefore \quad 2x^2 + 14x - 120 = 0$

పై సమీకరణంను తృప్తి పరిచే x విలువయే B గేటు నుంచి P వరకూ గల దూరం అవుతుంది.

అనగా $x^2 + 7x - 60 = 0$

సమీకరణంనకు వాస్తవ మూలాలు వున్నప్పుడే స్తంభమును ఏర్పాటు చేయడానికి వీలవుతుంది. అయితే ఈ సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలాలు వున్నదీ లేనిదీ దీని విచక్షణి ఆధారంగానే తెలుసుకోగలం. కనుక ముందుగా దీనిని విచక్షణిని పరిశీలిద్దాం.

$\therefore$ విచక్షణి $b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$

అనగా ఈ వర్గ సమకరణంనకు రెండు విభిన్న వాస్తవ మూలాలు వుంటాయి. అంటే సమస్యలో ఇచ్చిన షరతులకు అనుగుణంగా స్తంభమును ఏర్పాటు చేయడం సాధ్యమే.

సూత్రమును ఉపయోగించి $x^2 + 7x - 60 = 0$ ను సాధిస్తే

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

$x = 5$ లేదా -12.

అయితే x దూరమును సూచిస్తుంది. కనుక ఇది ఖచ్చితంగా ధనాత్మకము.

$\therefore \quad x = 5.$

అనగా B నుంచి 5మీ దూరంలో మరియు A నుంచి 12 మీ. దూరంలో స్తంభంను ఏర్పాటు చేయాలి.

ప్రయత్నించండి

1. ఒక వర్గ సమీకరణమును సాధించటానికి ముందు దాని యొక్క విచక్షణిని కనుగొనుటం వల్ల కలిగే లాభం ఏమిటో వివరించండి ? దీని విలువ ఎందుకు ముఖ్యమైనది ?
2. మూడు వేరువేరు వర్గ సమీకరణాలను తయారుచేయుము. అందులో ఒకటి రెండు వేరువేరు వాస్తవ మూలాలను, మరిఒకటి రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను ఇంకొకటి వాస్తవ మూలాలను కలిగిలేని విధంగా వుండాలి.

ఉదాహరణ-16. $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ యొక్క విచక్షణిని కనుగొనుము ? తద్వారా మూలాల స్వభావమును తెలుపుము ? ఒకవేళ మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలైతే వానిని కనుగొనుము?

సాధన : ఇచ్చుట $a = 3, b = -2$ మరియు $c = \frac{1}{3}$

విచక్షిణి $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0.$

ఇచ్చి వర్గ సమీకరణంను రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలు వుంటాయి.

అవి $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}, \Rightarrow \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{3}.$

అభ్యాసం - 5.4

1. క్రింది సమీకరణాల మూలాల స్వభావమును తెలుపుము ? ఒక వేళ వాస్తవ మూలాలు వుంటే కనుగొనుము.

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. క్రింది వర్గ సమీకరణాలలో రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలు వుంటే k విలువను కనుగొనుము ?

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. మామిడి పండ్లను నిల్వచేయుటకు 800 చ.మీ. వైశాల్యం వుంటూ, పొడవు వెడల్పు కంటే రెండు రెట్లు వుండే విధంగా ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార స్థలమును ఏర్పాటు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము?

4. ఇద్దరి మిత్రుల వయస్సుల మొత్తం 20 సం॥లు. నాలుగు సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సుల లబ్ధం 48. ఇది సాధ్యమేనా? ఒకవేళ సాధ్యమైతే వారి వయస్సులను కనుగొనుము.

5. చుట్టుకొలత 80 మీ. వైశాల్యము 400 చ.మీ. వుండునట్లు ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పార్కును తయారు చేయగలమా? చేయగలిగితే దాని పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనుము?

ఐచ్ఛిక అభ్యాసము

[ఇది పరీక్ష కొరకు ఉద్దేశించినది కాదు]

1. ఒక తలంలో కొన్ని బిందువులు గుర్తించబడినవి. ప్రతి బిందువు మిగిలిన అన్ని బిందువులతో రేఖా ఖండాలచే కలుపబడింది. ఈ విధంగా చేయటం వల్ల మొత్తం 10 రేఖాఖండాలు ఏర్పడితే మొత్తం బిందువులు ఎన్ని ?

2. ఒక రెండంకెల సంఖ్యలో అంకెల లబ్ధం 8. ఈ సంఖ్యకు 18 కలిపిన వచ్చే సంఖ్య మొదటి సంఖ్యలోని అంకెలను తారు మారు చేయగా వచ్చే సంఖ్య ఒక్కటే. అయిన మొదటి సంఖ్యను కనుగొనుము?

3. 8 మీ. పొడవు వున్న తీగకు రెండు ముక్కలుగా కత్తిరించారు. ప్రతి ముక్కను తిరిగి ఒక చతురస్రాకారంగా వంచారు. ఇలా ఏర్పడిన రెండు చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం 2 చ.మీ. కావలెనన్న ప్రతి ముక్క పొడవు ఎంత వుండాలి?

$$\left[x + y = 8, \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = 2\right].$$

4. వినయ్ మరియు ప్రవీణ్‌లు కలిసి ఒక ఇంటికి రంగులు వేసే పనిని 6 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. వినయ్ ఒక్కడే ఆ పనిని ప్రవీణ్ కంటే 5 రోజులు ముందుగా పూర్తి చేయగలడు. అయిన వినయ్ ఒక్కడే ఆ పనిని ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలడు.

5. ఒక వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలు మొత్తం $\frac{-b}{a}$ అని చూపుము?

6. ఒక వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాల లబ్దం $\frac{c}{a}$ అని చూపుము ?

7. ఒక భిన్నములో హారము, లవము యొక్క రెట్టింపు కంటే ఒకటి ఎక్కువ. ఆ భిన్నము మరియు దాని వుత్క్రమాల మొత్తము $2\frac{16}{21}$ అయిన ఆ భిన్నమును కనుగొనుము.

మనం ఏమి చర్చించాం

ఈ అధ్యాయంలో ఈ క్రింది విషయాలను మనము చర్చించినాము.

1. చరరాశి 'x' లో వర్గ సమీకరణం యొక్క ప్రామాణిక రూపం : $ax^2 + bx + c = 0$. ఇచ్చట a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 0$.

2. ఏదైనా ఒక వాస్తవసంఖ్య 'α' కు $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ అయిన 'α' ను $ax^2 + bx + c$ వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలము అంటాము. $ax^2 + bx + c$ అనే వర్గ బహుపది యొక్క శూన్య విలువలు, $ax^2 + bx + c = 0$ అనే వర్గ సమీకరణం యొక్క మూలాలు ఒక్కటే.

3. $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ను రెండు రేఖీయ కారణాంకాల లబ్దంగా రాసి ప్రతి దానికి సున్నాకు సమానం చేయటం ద్వారా $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలను కనుగొనగలుగుతాము.

4. ఒక వర్గ సమీకరణమును వర్గమును పూర్తి చేయుట ద్వారా కూడా సాధించవచ్చు.

5. $b^2 - 4ac \geq 0$ అయినపుడు $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

6. $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణం

   (i) $b^2 - 4ac > 0$ అయిన రెండు వేరు వేరు వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుంటుంది.

   (ii) $b^2 - 4ac = 0$, అయిన రెండు సమాన వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుంటుంది.

   (iii) $b^2 - 4ac < 0$ అయిన వాస్తవ మూలాలను కలిగి వుండదు.