అధ్యాయము

1

వాస్తవ సంఖ్యలు

(Real Numbers)

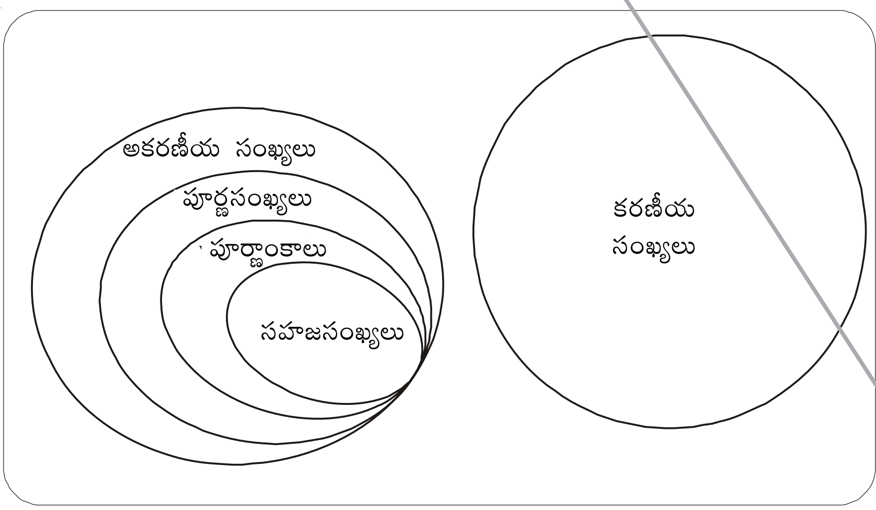
1.1 పరిచయం

మనం ముందు తరగతుల్లో వివిధ రకాలైన సంఖ్యలను గూర్చి తెలుసుకున్నాము. అంటే సహజసంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలు, పూర్ణసంఖ్యలు, అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలను గూర్చి నేర్చుకున్నాం. అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలను గురించి మరికొన్ని విషయాలు జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం.

p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలైయుండి, $q \neq 0$ అయిన సందర్భంలో $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగల సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలంటారు. ఈ సంఖ్యలు పూర్ణసంఖ్యల కన్నా పెద్ద సమూహంగా వుంటాయి. అదేవిధంగా ఏ రెండు పూర్ణసంఖ్యల మధ్యనైనా అనేక అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయి. అన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను అంతమయ్యే దశాంశాలుగానూ లేదా అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా గాని రాయవచ్చును.

$\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేనటువంటి సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలంటారు. వీటిలో $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ మొదలగు సంఖ్యలు, అదేవిధంగా గణిత ప్రమాణాలైన π మొ॥నవి కూడా ఉంటాయి. వీటిని దశాంశాలుగా రాసేటప్పుడు అవి అంతం కాని మరియు ఆవర్తనం కాని దశాంశాలుగా వస్తాయి. ఉదాహరణకు $\sqrt{2} = 1.41421356...$ మరియు $\pi = 3.14159...$ ఈ సంఖ్యలను కూడా మనం సంఖ్యారేఖపై గుర్తించగలము.

అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలు కలిసి ఉన్న సమూహాన్ని మనం వాస్తవ సంఖ్యలు అంటాము. కింది పటంలో వీటిని మనం చూడవచ్చు.



వాస్తవ సంఖ్యలు

ఈ అధ్యాయములో మనం కొన్ని సిద్ధాంతాలను విభిన్న పద్ధతులలో నిరూపించడం తెలుసుకుంటాము. ఇదేవిధంగా కరణీయ, అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలను రాబట్టడానికి ఈ సిద్ధాంతాలను ఉపయోగించుకుంటాము. చివరగా మనం సంవర్గమానాలు (logarithms) అనే ఒక రకమైన ప్రమేయాలను తెలుసుకొని వాటిని శాస్త్రవిజ్ఞానంలోనూ, నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనలోనూ ఏవిధంగా వినియోగించుకోవచ్చునో తెలుసుకుంటాము.

వాస్తవ సంఖ్యల అధ్యయనానికి ముందుగా మనము కొన్ని సమస్యలను సాధించి చూద్దాము.

అభ్యాసం - 1.1

1. కింది అకరణీయ సంఖ్యలలో ఏది అంతమయ్యే దశాంశాలో, ఏవి అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి.

   (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{17}{18}$ (iii) $\frac{15}{16}$ (iv) $\frac{7}{40}$ (v) $\frac{9}{11}$

2. కింది జతల సంఖ్యల మధ్యన గల ఏదేని ఒక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనండి.

   (i) $\frac{1}{2}$ మరియు $\sqrt{1}$ (ii) $3\frac{1}{3}$ మరియు $3\frac{2}{3}$ (iii) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ మరియు $\sqrt{2}$

3. కింది సంఖ్యలలో ఏవి అకరణీయాలు? ఏవి కరణీయాలు?

   (i) $2\frac{1}{2}$ (ii) $\sqrt{24}$ (iii) $\sqrt{16}$ (iv) $7.\overline{7}$ (v) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ (vi) $-\sqrt{30}$ (vii) $-\sqrt{81}$

4. కింది వాస్తవ సంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖపై గుర్తించండి. అవసరమైతే ప్రతి సంఖ్యకు ఒక ప్రత్యేకమైన సంఖ్యారేఖను గీయండి.

   (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-9}{10}$ (iii) $\frac{27}{3}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $-\sqrt{16}$

ఆలోచించి, చర్చించి, రాయండి

అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలను వాస్తవ సంఖ్యలలో చేర్చవచ్చునా? ఎందుకు?

1.2 వాస్తవ సంఖ్యల అన్వేషణ

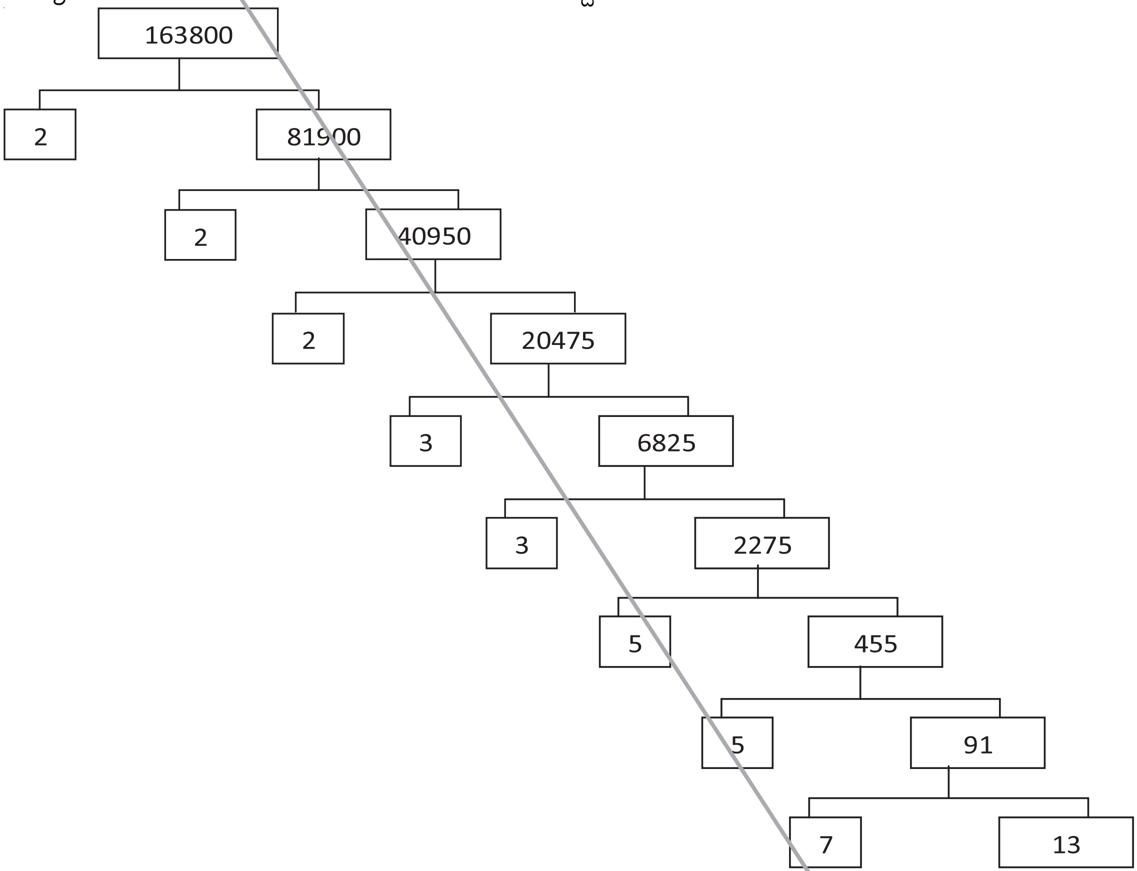
వాస్తవ సంఖ్యలను గురించి మరిన్ని అంశాలను ఈ విభాగములో అన్వేషిద్దాము. సహజసంఖ్యలు అన్నియూ వాస్తవ సంఖ్యలలో ఇమిడివున్నాయని మనకు తెలుసు. అందుచే వాటితోనే ప్రారంభిద్దాము.

1.2.1 అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము

1 తప్ప, మిగిలిన అన్ని సహజసంఖ్యలను వాటి ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చునని కింది తరగతులలో మీరు నేర్చుకున్నారు. ఉదాహరణకు $3 = 3$, $6 = 2 \times 3$ మరియు $253 = 11 \times 23$ గా వ్రాయవచ్చు. (ప్రధానసంఖ్య, సంయుక్త సంఖ్య కానిది '1' అని గుర్తుకుతెచ్చుకొండి)

ప్రధానాంకాల ఘాతాల లబ్ధంగా రాయలేని ఏదైనా సంయుక్తసంఖ్య కలిగి వుంటుందని మీరు భావిస్తున్నారా? మనము ఒక సహజసంఖ్యను తీసుకొని కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసి, దీనికి సమాధానము పరిశీలిద్దాం.

ఇప్పుడు మనం కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసే వృక్షచిత్రాన్ని వాడుకుందాము. దీనికొరకు ఒక పెద్ద సంఖ్య 163800 ను తీసుకొని, కారణాంకాలుగా విభజిద్దాము.



దీని నుండి 163800 ను $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13$ గా రాయవచ్చు. ఇదేవిధంగా ఈ సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల ఘాతాల లబ్ధంగా $163800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 13$ గా రాస్తాము.

మరొక సంఖ్య 123456789 ను తీసుకొని ప్రయత్నిద్దాము. దీనిని $3^2 \times 3803 \times 3607$ గా రాయవచ్చు. అయితే మీరు 3803 మరియు 3607 సంఖ్యలు ప్రధానాంకాలుగా సరిచూడవల్సి వుంది! (ఇదే విధంగా మీరు మరిన్ని సంఖ్యలను తీసుకొని ప్రయత్నించండి). ఈ ఫలితాల ఆధారంగా మనం ఒక ప్రాథమిక పరికల్పన (conjecture)ను ప్రతిపాదించవచ్చు. పరికల్పనను ఒకే సందిగ్ధ ప్రతిపాదన అని కూడా అంటారు. అదేమంటే "ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను దాని ప్రధాన సంఖ్యల ఘాతాల లబ్ధంగా రాయవచ్చు".

ఈ ఫలితాన్ని సహజ సంఖ్యలతో మరొక విధంగా పరిశీలిద్దాము. కొన్ని ప్రధాన సంఖ్యలు 2, 3, 7, 11 మరియు 23 లను తీసుకుందాము. వీటిలో కొన్నింటిని లేదా అన్నింటిని, ఏ సంఖ్య ఎన్నిసార్లు అయిననూ తీసుకొని గుణిస్తే మనకు అతిపెద్ద పూర్ణసంఖ్యలను అపరిమితంగా రాబట్టవచ్చు. వీటిలో మనము కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాము.

$2 \times 3 \times 11 = 66$ $\qquad$ $7 \times 11 = 77$

$7 \times 11 \times 23 = 1771$　　$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$　　$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

ఇప్పుడు, మీరు తీసుకున్న ఒక ప్రధాన సంఖ్యల సమూహములో అవకాశం గల అన్ని ప్రధానసంఖ్యలు వున్నాయనుకుందాం. అటువంటి సమూహాన్ని మీరు ఊహించగలరా? ఈ సమూహంలో సంయుక్త సంఖ్యలు పరిమిత సంఖ్యలో వుంటాయా? లేదా అపరిమితంగా వుంటాయా? కాని సాధారణంగా మనకు అపరిమితంగా ప్రధానసంఖ్యలు వుంటాయి. అందుచే మనం అన్ని ప్రధానసంఖ్యలను విభిన్న రీతులలో గుణిస్తే, మనకు అపరిమితంగా సంయుక్త సంఖ్యలు కూడా వస్తాయి.

ఈ చర్చ ద్వారా మనము అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము "ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానకారణాంక ముల లబ్ధంగా" గా నిర్వచించవచ్చును. దీనిని మరింత స్పష్టంగా చెప్పాలంటే ప్రధాన సంఖ్యల క్రమం ఏదైనప్పటికీ ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధంగా ఏకైకము (**unique**) గా రాయవచ్చును. ఉదాహరణకు మనము 210 సంఖ్యను కారణాంకములుగా రాసేటప్పుడు ప్రధానాంకాల క్రమము ఏదైనప్పటికీ దీనిని $2 \times 3 \times 5 \times 7$ లేదా $3 \times 5 \times 7 \times 2$ లేదా మరేవిధంగా నైననూ లబ్ధముగా రాయవచ్చును. అందుచే ఏ సంయుక్త సంఖ్యను అయిననూ ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధముగా ఒకేఒక విధంగా రాయవచ్చును. దీనిని మనం సిద్ధాంత పరంగా ఇప్పుడు నిర్వచిద్దాము.

సిద్ధాంతము-1.1 : (అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము) : ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధానాంకముల లబ్ధంగా రాయవచ్చును మరియు ప్రధాన కారణాంకాల క్రమం ఏదైనప్పటికీ ఈ కారణాంకాల లబ్ధం ఏకైకము

దీనిని, సాధారణంగా ఒక సంయుక్త సంఖ్య x ను $x = p_1p_2...p_n$ అని రాయవచ్చు. దీనిలో p_1, p_2..., p_n అనేవి ఆరోహణ క్రమంలో రాయబడిన ప్రధానాంకాలు, అంటే $p_1 \le p_2 \le ... \le p_n$. ఈ సందర్భంలో ఒకే రకమైన ప్రధానాంకములు వాడినచో వాటిని ప్రధానాంకాల ఘాతాలుగా రాస్తాము. ఒకసారి మనం ఈ సంఖ్యలు ఆరోహణక్రమంలో వున్నాయని భావిస్తే, అప్పుడు ఈ లబ్ధం ఏకైకం అవుతుంది.

ఉదాహరణకు $163800 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 13$

ప్రయత్నించండి

2310 ను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాయండి. ఈ సంఖ్యను నీ స్నేహితులు ఏవిధంగా కారణాంకాల లబ్ధంగా రాసారో చూడండి. నీవు చేసినట్లుగానే వారు కూడా చేసారా ? చివరి ఫలితాన్ని, నీ స్నేహితుల ఫలితంతో సరిచూడుము. దీని కొరకు 3 లేదా 4 సంఖ్యలను తీసుకొని ప్రయత్నించుము. నీవు ఏమి గమనిస్తావు?

మీరు తెలుసుకున్న ఫలితం చాలా సులభంగా అవగాహన అయివుండి నిర్వచింపబడి వుండవచ్చును. దీని యొక్క అనువర్తనం గణితంలో అనేక విధాలుగా ఉంది. దీనికొరకు రెండు ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

మీరు ఇది వరకు రెండు ధనపూర్ణసంఖ్యలు గ.సా.కా (గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకం) మరియు క.సా.గు (కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం) ను అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ఉపయోగించి కనుగొనడం, సంపూర్ణ అవగాహన లేకుండానే నేర్చుకున్నారు.

ఈ పద్ధతినే మనము ప్రధానకారణాంకాల లబ్దపద్ధతి అంటాము. కింది ఉదాహరణ ద్వారా మనము ఈ పద్ధతిని ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాము.

ఉదాహరణ-1. 12 మరియు 18 ల యొక్క గ.సా.కా మరియు క.సా.గులను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ద పద్ధతిలో కనుగొనుము

సాధన : మనకు $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$ అగును

12, 18 ల గ.సా.కా $= 2^1 \times 3^1 = 6$ = **సంఖ్యల యొక్క సామాన్య కారణాంకముల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం.**

12, 18 ల క.సా.గు $= 2^2 \times 3^2 = 36$ = **సంఖ్యల యొక్క సామాన్య కారణాంకముల గరిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం**

పై ఉదాహరణ నుండి, మీరు ఒక సంబంధము అంటే(12, 18) ల గ.సా.కా $\times$ (12, 18) ల క.సా.గు $= 12 \times 18$ లబ్ధం అయినదని మీరు గమనించే వుంటారు. అనగా రెండు ధనపూర్ణసంఖ్యలు a మరియు b, లు అయినచో వాటి గ.సా.కా(a,b) $\times$ క.సా.గు(a, b) = a $\times$ b అవుతుందని సరిచూడవచ్చును. దీనిని బట్టి రెండు ధనపూర్ణసంఖ్యలు, వాటి గ.సా.కా తెలిసినప్పుడు ఆ సంఖ్యల క.సా.గును ఈ ఫలితం ఆధారంగా కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ- 2. n ఒక సహజసంఖ్య గా గల సంఖ్య 4^n తీసుకొండి. n యొక్క ఏ విలువకైనా 4^n సంఖ్య 'సున్న' అంకెతో అంతమౌతుందో లేదో సరిచూడండి.

సాధన : n సహజసంఖ్యగా గల సంఖ్య 4^n సున్నతో అంతం కావాలంటే అది '5' చే నిశ్శేషంగా భాగించబడాలి. అంటే 4^n సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంలో 5 ఒక ప్రధాన సంఖ్యగా వుండాలి. కాని ఇది సాధ్యం కాదు. ఎందువలన అనగా $4^n = (2)^{2n}$. అందుచే 4^n యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్దంలో లేనందున, n ఏ సహజ సంఖ్య విలువకైననూ 4^n అనే సంఖ్య 'సున్న'తో అంతము కానేరదు.

ప్రయత్నించండి

ఏ సహజసంఖ్య "n"కు అయినా 12^n అను సంఖ్య 0 లేదా 5 తో అంతము కాదని నిరూపించండి.

అభ్యాసము - 1.2

1. కింది వానిలో ప్రతిసంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంగా రాయండి.

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. కింది పూర్ణసంఖ్యల యొక్క క.సా.గు మరియు గ.సా.కా లను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ద పద్ధతిలో కనుగొనండి.

   (i) 12, 15 మరియు 21 (ii) 17, 23 మరియు 29 (iii) 8, 9 మరియు 25

   (iv) 72 మరియు 108 (v) 306 మరియు 657

3. n ఒక సహజ సంఖ్య అయిన 6^n సంఖ్య 'సున్న'తో అంతమగునో, కాదో సరిచూడండి.

4. $7 \times 11 \times 13 + 13$ మరియు $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ఏవిధంగా సంయుక్త సంఖ్యలగునో వివరించండి.

5. $(17 \times 11 \times 2) + (17 \times 11 \times 5)$ అనేది ఒక సంయుక్త సంఖ్య అని ఏవిధంగా నిరూపిస్తావు? వివరించండి.

వాస్తవ సంఖ్యలను గురించి మరింతగా పరిశోధించడానికి అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంను వినియోగిద్దాం. మొదట అకరణీయ సంఖ్యలను అంతంగల దశాంశాలుగాను, అంతం లేని ఆవర్తన దశాంశ రూపంలో రాయునపుడు ఈ సిద్ధాంతం ఏవిధంగా ఉపయోగపడుతుందో తెలుసుకుందాం. ఇదేవిధంగా $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{5}$ మొదలగు సంఖ్యలు కరణీయ సంఖ్యలుగా ఏవిధంగా నిరూపించవచ్చునో పరిశీలిద్దాం.

1.2.2 అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు వాటి దశాంశ రూపాలు

అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశరూపంలో మార్చునపుడు ఏఏసందర్భాలలో ఇవి అంతం గల దశాంశాలో లేదా అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశాలో ఈ విభాగంలో పరిశీలిద్దాము.

కింది కొన్ని అకరణీయసంఖ్యలకు అంతమయ్యే దశాంశ రూపాలను పరిశీలిద్దాం.

(i) 0.375 (ii) 1.04 (iii) 0.0875 (iv) 12.5 (v) 0.00025

ఇప్పుడు సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాద్దాం.

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$

(ii) $1.04 = \frac{104}{100} = \frac{104}{10^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$

(iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{125}{10^1}$

(v) $0.00025 = \frac{25}{100000} = \frac{25}{10^5}$

మనం తీసుకున్న అంతం గల దశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా రాయునపుడు హారంలోని ఘాతాలన్నీ 10 భూమిగా వ్యక్తం చేయబడ్డాయి. ఇప్పుడు లవ, హారాలను ప్రధాన కారాణాంకముల లబ్ధంగా రాసి, అకరణీయ సంఖ్యలను సూక్ష్మరూపంలో రాద్దాం.

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$

(ii) $1.04 = \frac{104}{10^2} = \frac{2^3 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{26}{5^2} = \frac{26}{25}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{5^3 \times 7}{2^4 \times 5^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$

(iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{25}{2}$

(v) $0.00025 = \frac{25}{10^5} = \frac{5^2}{2^5 \times 5^5} = \frac{1}{2^5 \times 5^3} = \frac{1}{4000}$

ఈ అకరణీయ సంఖ్యల హారాలలో ఏదైనా అమరికను మీరు గమనించారా? ఒక దశాంశ సంఖ్యను అకరణీయ సంఖ్యగా సూక్ష్మరూపంలో వ్యక్తపరచునపుడు p, q లు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు మరియు హారం (అనగా q) యొక్క కారణాంకాలు 2 లేదా 5 లేదా రెండింటి యొక్క ఘాతాలలో రాయునపుడు ఈ అమరికను పరిశీలించవచ్చును. ఎందువలన అనగా 10 ఘాతంగా గల సంఖ్య యొక్క ప్రధానకారణాంకాలు 2 లేదా 5 మరియు రెండింటి ఘాతాలుగా మాత్రమే ఉంటాయి.

ఇవి చేయండి

కింది అంతమొందే దశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా ($\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ మరియు p, q లు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు) రాయండి.

(i) 15.265 (ii) 0.1255 (iii) 0.4 (iv) 23.34 (v) 1215.8

ఈ ప్రక్రియలో అకరణీయ సంఖ్యల హారాలను గురించి ఏమి చెప్పగలరు ?

మనం దీనిని కింది విధంగా ముగిద్దాం.

మనం దీనికి సంబంధించి కొన్ని ఉదాహరణలను మాత్రమే పరిశీలించినప్పటికీ ఏ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ రూపమైనా అంతమొందే దశాంశం అయినపుడు ఆ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క హారాన్ని 10 యొక్క ఘాతంగా గల సంఖ్యగా రాయవచ్చును. 10 యొక్క ప్రధాన కారణాంకములు 2 మరియు 5 మాత్రమే. కావున ఒక అకరణీయ సంఖ్యను సూక్ష్మీకరించునపుడు ఆ సంఖ్య $\frac{p}{q}$ రూపంలో వుంటూ q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధం 2^n5^m రూపంలో వుంటుంది, ఇందులో n మరియు m లు ఏవైనా రెండు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు.

ఈ ఫలితాన్ని మనం సిద్ధాంత రూపంలో కింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

సిద్ధాంతం-1.2 : x అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు దీని దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశము, అయినప్పుడు x ను p, qలు పరస్పర ప్రధానాంకాలు అయివున్న $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు. మరియు q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం 2^n5^m అగును. ఇందులో n, m లు అనేవి రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు.

మరి దీని యొక్క విపర్యయము మనం పరిశీలిస్తే మనకు ఒకింత ఆశ్చర్యం కలుగక మానదు. అంటే $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఒక అకరణీయ సంఖ్యయుండి, q యొక్క రూపం 2^n5^m (ఇందు n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు) కలిగివున్న $\frac{p}{q}$ ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అవుతుందా?

దీని నుండి మనం $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఒక అకరణీయ సంఖ్య వుండి, q అనేది 2^n5^m రూపంలో వుంటే దానికి తుల్యమైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$ అవుతుంది. ఇందులో b అనేది 10 యొక్క ఘాత సంఖ్యగా భావించండి.

దీనిని పరిశీలించడానికి మనం ముందు ఉదాహరణను తిరిగి మరొకసారి పరిశీలించి, విపర్యయంను అవగాహన చేసుకుందాం.

(i) $\frac{25}{2} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{125}{10} = 12.5$

(ii) $\frac{26}{25} = \frac{26}{5^2} = \frac{13 \times 2^3}{2^2 \times 5^2} = \frac{104}{10^2} = 1.04$

(iii) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$

(iv) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

(v) $\frac{1}{4000} = \frac{1}{2^5 \times 5^3} = \frac{5^2}{2^5 \times 5^5} = \frac{25}{10^5} = 0.00025$

పై ఉదాహరణలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో వుండి దీనిలో q యొక్క రూపం 2^n5^m కలిగిన అకరణీయ సంఖ్యకు ఒక తుల్యమైన అకరణీయ సంఖ్య $\frac{a}{b}$ గా రాయవచ్చు. మరియు ఇందులో b అనేది 10 యొక్క ఒక ఘాత సంఖ్య. అందువలన ఇటువంటి అకరణీయ సంఖ్యలు అంతంగల దశాంశాలుగా రూపొందుతాయి. అంటే q అనేది 10 యొక్క ఘాతసంఖ్య అయి వుండి $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగే ఒక అకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అగును.

అందుచే, సిద్ధాంతం 1.2 యొక్క విపర్యయం కూడా సత్యమే. మరి దీనిని మనం క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.

సిద్ధాంతము 1.3 : n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ద రూపం 2^n5^m కలిగినటువంటి అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అగును.

ఇది చేయండి

కింది అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో వున్నాయి. ఇందులో q యొక్క రూపం 2^n5^m మరియు ఇందులో n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు అయిన వీటిని దశాంశ రూపాలలోనికి మార్చండి.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{51}{64}$ (iv) $\frac{14}{23}$ (v) $\frac{80}{81}$

1.2.3 అంతంకాని, ఆవర్తనం చెందే దశాంశాలను అకరణీయ సంఖ్యలుగా రాయుట

మనం ఇప్పుడు అంతం కాని, ఆవర్తనం చెందే కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను, వాటి దశాంశ రూపాలను పరిశీలిద్దాం. దీని కొరకు మనం ఒక ఉదాహరణను పరిశీలలించి, ఏవిధంగా దశాంశరూపం ఏర్పడిందో చూద్దాం.

```
        0.1428571
     7) 1.0000000
         7
        --
         30
         28
         --
          20
          14
          --
           60
           56
           --
            40
            35
            --
             50
             49
             --
              10
               7
              --
               30
```

$\frac{1}{7}$ యొక్క దశాంశరూపాన్ని చూడండి.

$\frac{1}{7} = 0.1428571428571$ ..... ఇది ఒక అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం.

భాగఫలంలో '142857' అంకెల సమూహం ఆవర్తనం చెందుట గమనించండి.

ఈఅకరణీయ సంఖ్యలో హారం 7 కావున, ఇది 2^n5^m రూపంలో లేదని పరిశీలించవచ్చు.

ఇది చేయండి

కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశాలుగా రాయండి. భాగఫలంలో ఆవర్తనం చెందే అంకెల సమూహాన్ని కనుగొనండి.

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$

పైన మీరు చేసిన 'ఇది చేయండి' అభ్యాసం మరియు పైన చూపిన ఉదాహరణ ద్వారా మనం కింది సిద్ధాంతంను నిర్వచించవచ్చు.

సిద్ధాంతము-1.4 : n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకముల లబ్ధం 2^n5^m రూపంలో లేకుంటే, అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతంకాని, ఆవర్తనం చెందే దశాంశం అగును.

పై చర్చ ద్వారా మనం "ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక అంతమయ్యే దశాంశం" లేదా "అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం" గాని అగునని నిర్ధారించవచ్చును.

ఉదాహరణ-3. నిర్వచింపబడిన సిద్ధాంతాల ఆధారంగా, భాగహారం చేయకుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలు అంతమయ్యే దశాంశాలో, అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి.

(i) $\frac{16}{125}$ (ii) $\frac{25}{32}$ (iii) $\frac{100}{81}$ (iv) $\frac{41}{75}$

సాధన : (i) $\frac{16}{125} = \frac{16}{5\times5\times5} = \frac{16}{5^3}$ = అంతమయ్యే దశాంశం

(ii) $\frac{25}{32} = \frac{25}{2\times2\times2\times2\times2} = \frac{25}{2^5}$ = అంతమయ్యే దశాంశం

(iii) $\frac{100}{81} = \frac{100}{3\times3\times3\times3} = \frac{10}{3^4}$ = అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం

(iv) $\frac{41}{75} = \frac{41}{3\times5\times5} = \frac{41}{3\times5^2}$ = అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం

ఉదాహరణ-4. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగహారం చేయకుండానే దశాంశరూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{35}{50}$ (ii) $\frac{21}{25}$ (iii) $\frac{7}{8}$

సాధన : (i) $\frac{35}{50} = \frac{7\times5}{2\times5\times5} = \frac{7}{2\times5} = \frac{7}{10^1} = 0.7$

(ii) $\frac{21}{25} = \frac{21}{5\times5} = \frac{21\times2^2}{5\times5\times2^2} = \frac{21\times4}{5^2\times2^2} = \frac{84}{10^2} = 0.84$

(iii) $\frac{7}{8} = \frac{7}{2\times2\times2} = \frac{7}{2^3} = \frac{7\times5^3}{(2^3\times5^3)} = \frac{7\times25}{(2\times5)^3} = \frac{875}{(10)^3} = 0.875$

అభ్యాసం- 1.3

1. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశరూపంలో రాయండి. ఇందులో ఏవి అంతమయ్యే దశాంశాలో, ఏవి అంతంకాని ఆవర్తన దశాంశాలో తెలపండి.

   (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{229}{400}$ (iii) $4\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{11}$ (v) $\frac{8}{125}$

2. భాగహార ప్రక్రియ లేకుండానే క్రింది అకరణీయ సంఖ్యలలో వేటిని అంతమయ్యే దశాంశాలుగా రాయగలమో? వేటిని అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశాలుగా రాయగలమో తెలపండి.

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{9}{15}$ (ix) $\frac{36}{100}$ (x) $\frac{77}{210}$

3. సిద్ధాంతం 1.1ను అనుసరించి కింది అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క దశాంశ రూపాన్ని తెలపండి

(i) $\frac{13}{25}$ (ii) $\frac{15}{16}$ (iii) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (iv) $\frac{7218}{3^2.5^2}$ (v) $\frac{143}{110}$

4. కింది కొన్ని వాస్తవసంఖ్యల దశాంశరూపాలు ఇవ్వబడినవి. ప్రతి సందర్భంలోనూ ఇవ్వబడిన సంఖ్య అకరణీయమో కాదో తెలపండి. ఆ సంఖ్య అకరణీయమై వుండి $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగితే q యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలను గూర్చి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000… (iii) $43.\overline{123456789}$

1.3 కరణీయ సంఖ్యలు - మరిన్ని అంశాలు

p, q లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $q \neq 0$ అయిన $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయలేనటువంటి వాస్తవ సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలు (Q' లేదా S) అంటారని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. మీరు ఇదివరకే తెలుసుకున్న కొన్ని కరణీయ సంఖ్యలను కింద ఉదహరిద్దాం.

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots, \text{మొ॥నవి.}$$

ఈ విభాగంలో మనం అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంను అనుసరించి కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలుగా నిరూపిద్దాం. అంటే $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ మొ॥నవి. మనం సాధారణంగా p ఒక ప్రధాన సంఖ్య అయిన $\sqrt{p}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చు.

$\sqrt{2}$ ను మనం కరణీయ సంఖ్యగా నిరూపించుటకు ముందుగా దీనిని అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ఆధారంగా నిరూపించబడిన ప్రవచనాన్ని తెలుసుకుందాం.

ప్రవచనం-1 : p అనేది ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయితే "a^2ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తే a ను p నిశ్శేషంగా" భాగిస్తుంది.

నిరూపణ: 'a' అనేది ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య అయితే 'a' యొక్క ప్రధాన కారణాంకాల లబ్దంను కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$a = p_1 p_2 \ldots p_n$, ఇందులో $p_1, p_2, \ldots, p_n$ లు ప్రధానాంకాలు మరియు వేర్వేరుగా ఉండనవసరం లేదు.

అందుచే $a^2 = (p_1 p_2 \ldots p_n)(p_1 p_2 \ldots p_n) = p^2_1 p^2_2 \ldots p^2_n$ అగును.

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతంను అనుసరించి a^2 ను p నిశ్శేషంగా భాగించునని ఇవ్వబడినందున, అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతను అనుసరించి a^2 యొక్క ఒక ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధం $p_1\ p_2 \ldots p_n$ అగును. కావున p అనేది $p_1, p_2, \ldots p_n$ లలో ఒకటిగా వుంటుంది.

ఇప్పుడు p అనేది $p_1 p_2 \ldots p_n$, లలో ఒకటిగా నున్నందున, ఇది 'a' ను కూడా నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

ఇది చేయండి

p= 2 , p = 5 మరియు $a^2 = 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64$ మరియు 81 అయిన పైన నిరూపించిన ప్రవచనంను ఈ విలువలకు సరిచూడండి.

మనం ఇప్పుడు $\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించుటకు ప్రయత్నిద్దాం. ఇటువంటి నిరూపణ విధానాన్ని మనం 'విరోదాభాసం' (contradiction) అంటాం.

ఉదాహరణ-5. $\sqrt{2}$ ను కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

నిరూపణ : ఈ నిరూపణ 'విరోదాభాసం' ద్వారా చేయుచున్నందున మనం నిరూపించవలసిన ఫలితానికి విరుద్ధంగా $\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని భావిద్దాం.

ఇది అకరణీయం అయితే, r మరియు s అనే రెండు పూర్ణ సంఖ్యలు $(s \neq 0)$ $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతుంది.

ఒకవేళ r మరియు s లకు 1 కాకుండా ఏదైనా సామాన్య కారణాంకం ఉంటే, ఆ సామాన్య కారణాంకం చేత భాగిస్తే మనకు $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, ఇందులో a మరియు b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు గా వస్తుంది.

దీని నుండి $b\sqrt{2} = a$ అవుతుంది.

ఇరువైపులా వర్గం చేసి, క్రమంలో అమర్చగా, మనకు $2b^2 = a^2$ వస్తుంది. అంటే a^2 ను 2 భాగిస్తుంది.

ఇప్పుడు ప్రవచనం-1ను బట్టి a^2 ను 2 భాగించినందున a ను కూడా ఇది భాగిస్తుంది.

అందుచే మనం తిరిగి $a = 2c$, c అనేది ఒక పూర్ణసంఖ్యగా రాయవచ్చు.

ఇందులో 'a' విలువను ప్రతిక్షేపించగా, మనకు $2b^2 = 4c^2$ అంటే $b^2 = 2c^2$ వస్తుంది.

అంటే b^2 ను 2 భాగిస్తుంది మరియు bని 2 భాగిస్తుంది. (ప్రవచనం-1లో p= 2).

అందువలన a మరియు b లకు 2 ఒక సామాన్య కారణాంకం అయినది.

a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు మరియు 1 తప్ప వీటికి ఎటువంటి ఉమ్మడి కారణాంకాలు లేనందున మనం ప్రతిపాదించిన $\sqrt{2}$ అనేది అకరణీయం అనే భావన విరుద్ధతకు దారి తీస్తుంది. అందుచే $\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్యగా నిరూపించవచ్చును.

సాధారణంగా 'd' అనేది ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య అయి వుండి, ఏ ఇతర పూర్ణసంఖ్యకు వర్గం కానిచో $\sqrt{d}$ ని మనం ఒక కరణీయ సంఖ్యగా భావిస్తాము. ఈ సందర్భంలో $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{15}\ \sqrt{24}$ మొ॥లగు వాటిని కరణీయ సంఖ్యలుగా చెప్పవచ్చును.

కింది తరగతులలో మనం తెలుసుకున్న విధంగా

- ఒక అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా భేదం మరొక కరణీయ సంఖ్య మరియు
- ఒక శూన్యేతర అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం మరియు భాగఫలం కూడా మరొక కరణీయ సంఖ్య అగును.

మనం కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో వీటిని నిరూపిద్దాం.

ఉదాహరణ-6. $5-\sqrt{3}$ ని ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన: మనం నిరూపించాల్సిన భావనకు విరుద్ధంగా, $5-\sqrt{3}$ ని ఒక అకరణీయ సంఖ్యగా ఊహించండి.

అంటే $5-\sqrt{3}=\dfrac{a}{b}$ ఇందులో a, b లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు మరియు $b \neq 0$.

కావున $5-\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}$

సమీకరణంను తారుమారు చేస్తే, మనకు $\sqrt{3}=5-\dfrac{a}{b}=\dfrac{5b-a}{b}$ అని వస్తుంది.

a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలు కావున మనకు $5-\dfrac{a}{b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. కావున $\sqrt{3}$ కూడా అకరణీయ సంఖ్యయే అగును. ఇది అసత్యం.

ఎందుకంటే $\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య.

ఈ భావన ఏర్పడడానికి, మనం ఊహించిన ప్రతిపాదన $5-\sqrt{3}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనే భావన తప్పు. అంటే ఇది ఒక విరోధాభాసం.

కావున $5-\sqrt{3}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని మనం చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ-7. $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

సాధన : మనం నిరూపించవలసిన భావనకు విరుద్ధంగా $3\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయసంఖ్యగా ఊహించండి.

a, bలు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు మరియు $b \neq 0$ అయ్యేటట్లు $3\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ అవుతుంది.

క్రమంలో అమర్చగా, మనకు $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$ అని వస్తుంది.

ఇందులో 3, a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున $\frac{a}{3b}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అందుచే $\sqrt{2}$ కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది అసత్యం.

ఎందుకంటే $\sqrt{2}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధభావన అందుచే ఇది ఒక విరోధాభాసం.

కావున మనం $3\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ-8. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

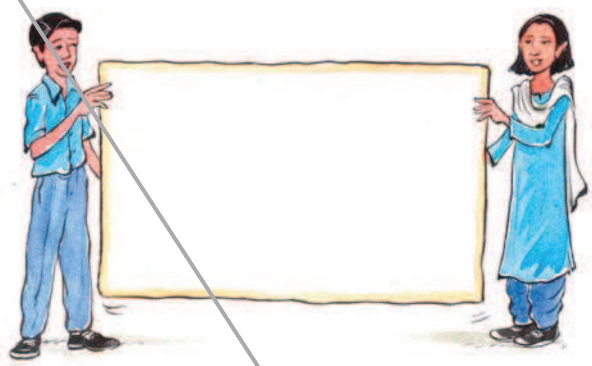
సాధన: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని ఊహించండి.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, ఇందు a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $b \neq 0$ అని తీసుకొండి.

కావున, $\sqrt{2}=\frac{a}{b}-\sqrt{3}$ అగును.

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా, మనకు

$$2=\frac{a^2}{b^2}+3-2\frac{a}{b}\sqrt{3}$$ వచ్చును



క్రమంగా అమర్చగా

$$\frac{2a}{b}\sqrt{3}=\frac{a^2}{b^2}+3-2$$

$$=\frac{a^2}{b^2}+1$$

అంటే $\sqrt{3}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$

a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు కావున, $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య ఇదేవిధంగా $\sqrt{3}$ కూడా ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఇది అసత్యం. ఎందుకంటే $\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అనే సత్యానికి విరుద్ధభావన. ఇది ఒక విరోధాభాసం. కావున $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయసంఖ్య అగును.

గమనిక :

1. రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ కరణీయసంఖ్య కాకపోవచ్చును.

   a, b లు రెండునూ కరణీయ సంఖ్యలుగా $a=\sqrt{2}$ మరియు $b=-\sqrt{2}$ గా తీసుకుంటే $a+b=0$ అగును. ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

2. రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ కరణీయం కాకపోవచ్చును.
ఉదాహరణకు, a, b లు రెండు కరణీయ సంఖ్యలుగా $a = \sqrt{2}$ మరియు $b = \sqrt{8}$ గా తీసుకుంటే
$ab = \sqrt{16} = 4$, ఇది ఒక అకరణీయ సంఖ్య

అభ్యాసం - 1.4

1. క్రింది వానిని కరణీయసంఖ్యలుగా నిరూపించండి.

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $3 + 2\sqrt{5}$

2. p, q లు ప్రధానాంకాలు అయితే $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

ప్రయత్నించండి

ఒక సంఖ్య అకరణీయమో, కరణీయమో తెలుసుకొనుటకు ఈ అధ్యాయంలో అనేక ఉదాహరణలు, సందర్భాలు తెలుసుకున్నారు. a, b మరియు c లు వాస్తవ సంఖ్యలై యున్నప్పుడు మీ యొక్క నూతన జ్ఞానాన్ని వినియోగించి దిగువ పట్టికలో ఇవ్వబడిన ధర్మాలు వాస్తవసంఖ్యలకు వర్తిస్తాయో, లేదో పరిశీలించండి. ఇవి వ్యవకలనం మరియు భాగహారానికి కూడా వర్తిస్తాయా? దీని కొరకు మీరు కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యలను తీసుకొని పరిశోధించండి.

	ధర్మం	సంకలనం	గుణకారం
1.	సంవృతధర్మం	$a + b = c$	$a . b = c$
2.	స్థిత్యంతర ధర్మం	$a + b = b + a$	$a . b = b.a$
3.	సహచరధర్మం	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(bc) = (ab).c$
4.	తత్సమాంశం	$a + 0 = 0 + a = a$	$a.1 = 1.a = a$
5.	విలోమం	$a + (-a) = 0$	$a.\frac{1}{a} = 1, (a \neq 0)$
6.	విభాగన్యాయం	$a (b + c) = ab + ac$	

1.5 సంవర్గమానాలు - ఒక అవగాహన

కింది విభాగంలో మనం సంవర్గమానాలను గురించి అవగాహన చేసుకుందాం. సంవర్గమానాలను అన్ని రకాల గణన ప్రక్రియలలో ముఖ్యంగా ఇంజనీరింగ్, సైన్సు, వ్యాపారం, అర్థశాస్త్రం లలో విరివిగా వినియోగిస్తారు. చక్రవడ్డీని గణించడానికి, ఘాతాలలో వుండే వృద్ధి రేటును, క్షీణతను తెలుసుకోవడానికి, రసాయనశాస్త్రం pH విలువ కనుగొనడానికి మరియు భూకంపాల తీవ్రత వంటి వాటిని లెక్కించడానికి వాడతారు.

అయితే సంవర్గమానాలను గూర్చి తెలుసుకోవడానికి ముందుగా మనం ఒకసారి ఘాతాంక న్యాయాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోవలసి వున్నది. ఎందువలన అంటే సంవర్గమానాలు, ఘాతాంక న్యాయాలు ఒకదానితో ఒకటి అవినాభావ సంబంధం కలిగి వున్నాయి.

1.5.1 ఘాతాల పునర్విమర్శ

మనం 81 సంఖ్యను 3^4 అని సూచిస్తే దీనిని ఘాతాంక రూపంలో రాయబడినదని అంటాం. అంటే $81 = 3^4$. ఇందులో 4 ను 'ఘాతాంకం' అనియూ 3ను 'భూమి' లేదా 'ఆధారం' అంటారు. అందుచే మనం

81 ను భూమి 3 యొక్క 4వ ఘాతం లేదా 3 యొక్క 4 వ ఘాతం అంటాం. ఇదేవిధంగా $27 = 3^3$.

ఇప్పుడు, మనం 27 ను 81 చే గుణించాలి అనుకొందాం. మనం దీనిని సాధారణపద్ధతిలో గుణించి, లబ్దం కనుగొనుట ఒక పద్ధతి. అయితే సంఖ్యలు 27 మరియు 81 ల కన్నా పెద్ద సంఖ్యలైనప్పుడు ఈ గుణకారం కష్టతరం అవుతుంది. మరి ఇటువంటి సందర్భాలలో ఘాతాంకాల ధర్మాలను వుపయోగించి గుణిస్తే గుణకారం సులభతరం అవుతుందా ?

మనకు $81 = 3^4$ మరియు $27 = 3^3$ అని తెలుసు.

ఘాతాంక న్యాయం $a^m \times a^n = a^{m+n}$, ఉపయోగించి, మనం దీనిని

$27 \times 81 = 3^3 \times 3^4 = 3^7$ అని రాయవచ్చు.

ఇప్పుడు మనకు 3 యొక్క ఘాతాల విలువల పట్టిక అందుబాటులో వుంటే మనం 3^7 యొక్క విలువను వెంటనే చెప్పగలం. దీని ద్వారా $81 \times 27 = 2187$ అగును.

ఇదేవిధంగా, 81ను 27చే భాగించాలంటే మనం ఘాతాంక న్యాయం $a^m \div a^n = a^{m-n}$, (ఇందులో $m > n$) ఉపయోగిస్తే, అప్పుడు $81 \div 27 = 3^4 \div 3^3 = 3^1$ లేదా 3 అగును.

ఇచ్చట మనం ఘాతాలనుపయోగించుటలో, గుణకార సమస్యలలో ఘాతాంకాల సంకలనం గానూ, భాగహార సమస్యలో ఘాతాంకాల వ్యవకలనం గానూ మార్చుడమైనది. అంటే ఘాతాంకాలు 4 మరియు 3ల సంకలనం మరియు ఘాతాంకాలు 4, 3 ల వ్యవకలనం.

ఇది చేయండి

10, 100, 1000, 10000 మరియు 100000 సంఖ్యలను ఘాతాంకాల రూపంలో రాయండి. ప్రతిసందర్భంలోనూ భూమి మరియు ఘాతాంకాన్ని కనుగొనండి.

ప్రయత్నించండి

(i) గుణకారం చేయకుండా, ఘాతాంకాలనుపయోగించి 16×64 లబ్దం కనుగొనుము.

(ii) గుణకారం చేయకుండా, ఘాతాంకాలనుపయోగించి 25×125 లబ్దం కనుగొనుము.

(iii) 128 మరియు 32 లను 2 యొక్క ఘాతాలుగా రాసి, $128 \div 32$ భాగఫలంను కనుగొనండి.

1.5.2 ఘాతాంకాలను సంవర్గమానాలుగా రాయుట

మనకు $10000 = 10^4$ అని తెలుసు. ఇచ్చట 10 ని భూమి, 4 ను ఘాతాంకం అంటాం. ఒక సంఖ్యను, ఒక భూమిగా గల సంఖ్యకు హెచ్చించి రాయడాన్ని ఘాతాంక రూపం అంటారు. దీనిని మరొక రూపంలో రాస్తే వాటిని సంవర్గమానాలు అంటారు.

ఉదాహరణకు, మనం $\log_{10} 10000 = 4$. అని రాస్తాము.

దీనిని 10 భూమి గా గల 10000 యొక్క సంవర్గమానం 4" అని నిర్వచించవచ్చును.

ఇచ్చట ఘాతాంక రూపంలో గల సంఖ్య యొక్క భూమి, సంవర్గమానంలో కూడా అదే భూమి అయినట్లు గమనించవచ్చును.

అందుచే, $10000=10^4$ అనేది $\log_{10}10000 = 4$ కు సమానమౌతుంది.

మనం సాధారణంగా సంవర్గమానాన్ని దిగువ విధంగా నిర్వచిస్తాము

a మరియు x లు ధనపూర్ణసంఖ్యలై $a \neq 1$ అయివుండి $a^n = x$ అయిన $\log_a x = n$ అగును.

ఈ సంవర్గమానాలను మరింతగా అవగాహన చేసుకొనుటకు కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ-9. i) $64 = 8^2$ ii) $64 = 4^3$ లను సంవర్గమానరూపంలో రాయండి.

సాధన : (i) $64 = 8^2$ యొక్క సంవర్గమానరూపం $\log_8 64 = 2$.

(ii) $64 = 4^3$ యొక్క సంవర్గమానరూపం $\log_4 64 = 3$.

ఈ ఉదాహరణలో, మనం 8 భూమిగా గల 64 యొక్క సంవర్గమానం 2 మరియు 4 భూమిగా గల 64 యొక్క సంవర్గమానం 3. కావున వేర్వేరు భూములు (ఆధారాలు) కలిగిన ఒక సంఖ్య యొక్క సంవర్గమానాలు విభిన్నంగా ఉంటాయి.

ఇది చేయండి

$16 = 2^4$ ను సంవర్గమానం తెలపండి. ఇది $\log_2 16$ కు సమానం అవుతుందా?

ఉదాహరణ-10. కింది వానిని ఘాతాంక రూపాలలో రాయండి.

(i) $\log_{10}100 = 2$ (ii) $\log_5 25 = 2$ (iii) $\log_2 2 = 1$ (iv) $\log_{10}10 = 1$

సాధన : (i) $\log_{10}100=2$ యొక్క ఘాతాంక రూపం $10^2 = 100$.

(ii) $\log_5 25=2$ యొక్క ఘాతాంక రూపం $5^2 = 25$.

(iii) $\log_2 2=1$ యొక్క ఘాతాంక రూపం $2^1 = 2$.

(iv) $\log_{10}10=1$ యొక్క ఘాతాంక రూపం $10^1 = 10$.

(iii) మరియు (iv) సందర్భాలలో మనం $\log_{10}10 =1$ మరియు $\log_2 2=1$ అని గమనించాము. దీని నుండి మనం సాధారణంగా, ఏ భూమి 'a' అయిననూ $a^1 = a$, కావున $\log_a a = 1$ అగును.

ప్రయత్నించండి.

$a^0 = 1$ అయిన $\log_a 1=0$ అని నిరూపించండి.

ఇవి చేయండి

1. క్రింది వానిని సంవర్గమానరూపంలో రాయండి.

   (i) $11^2 = 121$ (ii) $(0.1)^2 = 0.01$ (iii) $a^x = b$

2. క్రింది వానిని ఘాతాంక రూపంలో రాయండి.

   (i) $\log_5 125 = 3$ (ii) $\log_4 64 = 3$ (iii) $\log_a x = b$ (iv) $\log_2 2 = 1$

ఉదాహరణ-11. కింది సంవర్గమానాల విలువలను గణించండి.

(i) $\log_3 9$ (ii) $\log_8 2$ (iii) $\log_c \sqrt{c}$

సాధన : (i) $\log_3 9 = x$ అయిన దీని ఘాతాంక రూపం $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x=2$

(ii) $\log_8 2=y$ అయిన దీని ఘాతాంక రూపం $8^y=2 \Rightarrow (2^3)^y=2 \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}$

(iii) $\log_c \sqrt{c} = z$ అయిన దీని ఘాతాంక రూపం $c^z = \sqrt{c} \Rightarrow c^z = c^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z = \dfrac{1}{2}$

1.5.3 సంవర్గమాన మొదటి న్యాయము

మనం ఘాతాంక న్యాయాలు తెలుసుకున్నట్లే, సంవర్గమానాలలో ప్రధానంగా మూడు ధర్మాలున్నాయి. క్రింద మనం ఈ సంవర్గమాన న్యాయాలను నిరూపించుటను తెలుసుకుందాం.

1.5.3a సంవర్గమాన మొదటి న్యాయము

$x = a^n$ మరియు $y = a^m$, ఇందులో $a>0$ మరియు $a \neq 1$ అయిన సంవర్గమానాలను క్రింది విధంగా రాయవచ్చును.

$\log_a x = n$ మరియు $\log_a y = m$ .... (1)

ఘాతాంక న్యాయాలలో మొదటి న్యాయం $a^n \times a^m = a^{n+m}$ ను వినియోగిస్తే

మనకు $xy = a^n \times a^m = a^{n+m}$ i.e. $xy = a^{n+m}$ వస్తుంది.

దీనిని సంవర్గమాన రూపంలో రాయగా, మనకు

$\log_a xy = n+m$ .... (2)

కాని (1) నుండి $n = \log_a x$ మరియు $m=\log_a y$ తీసుకుంటే

మనకు $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

కావున, దీని నుండి రెండు సంఖ్యలను గుణించాలంటే, ఆ లబ్ధం యొక్క సంవర్గమానం కనుగొంటాం. దీనికొరకు ప్రతిసంఖ్య సంవర్గమానంను సంకలనం చేస్తాము. దీనినే సంవర్గమాన మొదటి న్యాయం అంటాము.

$$\mathbf{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

1.5.3b సంవర్గమాన రెండవ న్యాయాన్ని మనం $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ గా నిర్వచిస్తాము

ప్రయత్నించండి

ఘాతాంక న్యాయం $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ఉపయోగించి సంవర్గమాన రెండవ న్యాయాన్ని నిరూపించండి.

1.5.3c సంవర్గమాన మూడవ న్యాయము

$x = a^n$ అయిన $\log_a x = n$ అగును.

m యొక్క ఘాతానికి $x = a^n$ ను ఇరువైపులా హెచ్చింపగా,

$$x^m = (a^n)^m$$

ఘాతాంక న్యాయాలనుపయోగించి

$$x^m = a^{nm} \text{ అగును.}$$

మనం x^m ను ఒకే ప్రమాణం గల పదం అనుకుంటే, సంవర్గమాన రూపం

$$\log_a x^m = nm \text{ అవుతుంది.}$$

అంటే $\log_a x^m = m \log_a x$ $\qquad$ ($a^n = x$ కావున $\log_a x = n$)

దీనిని మనం మూడవన్యాయం అంటాము. ఒక ఘాత సంఖ్య యొక్క సంవర్గమానంను ఆఘాత సంఖ్య ఘాతాంకంను, ఆ సంవర్గమానంతో గుణించగా వచ్చు లబ్దానికి సమానమగును అని నిర్వచించవచ్చు.

$$\mathbf{\log_a x^m = m \log_a x}$$

ఉదాహరణ-12. log15 ను విస్తరించండి.

సాధన : $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ అని మనకు తెలుసు.

కావున, $\log 15 = \log (3 \times 5)$

$$= \log 3 + \log 5$$

ఉదాహరణ-13. $\log \frac{343}{125}$ ను విస్తరించండి.

సాధన : $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ అని మనకు తెలుసు.

కావున, $\log \frac{343}{125} = \log 343 - \log 125$

$$= \log 7^3 - \log 5^3$$

$\log_a x^m = m \log_a x$ కావున

$= 3\log 7 - 3\log 5$

కావున $\log \frac{343}{125} = 3(\log 7 - \log 5)$.

ఉదాహరణ-14. $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$ ను ఒకే సంవర్గమానంగా రాయండి.

సాధన : $2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$

$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5$ ($m \log_a x = \log_a x^m$ కావున)

$= \log 9 + \log 125 - \log 32$

$= \log (9 \times 125) - \log 32$ ($\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ కావున)

$= \log 1125 - \log 32$

$= \log \frac{1125}{32}$ ($\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ కావున)

ఇవి చేయండి

1. క్రింది లబ్దాలను $\log_a x + \log_a y$ రూపంలో రాయండి

   (i) 8×32 (ii) 49×343 (iii) 81×729

2. కింది భాగఫలాలను $\log_a x - \log_a y$ రూపంలో రాయండి.

   (i) $8 \div 64$ (ii) $81 \div 27$

3. కింది ఘాతాంక రూపాలను సంవర్గమాన రూపాలలో రాయండి

   (i) $4^3 = (2^2)^3$ (ii) $36^2 = (6^2)^2$

అభ్యాసం - 1.5

1. కింది వానిని సంవర్గమాన రూపంలో రాయండి.

   (i) $3^5 = 243$ (ii) $2^{10} = 1024$ (iii) $10^6 = 1000000$

   (iv) $10^{-3} = 0.001$ (v) $3^{-2} = \frac{1}{9}$ (vi) $6^0 = 1$

   (vii) $5^{-1} = \frac{1}{5}$ (viii) $\sqrt{49} = 7$ (ix) $27^{\frac{2}{3}} = 9$ (x) $32^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$

2. కింది వానిని ఘాతరూపంలో రాయండి.

(i) $\log_{18} 324 = 2$ (ii) $\log_{10} 10000 = 4$ (iii) $\log_a \sqrt{x} = b$

(iv) $\log_4{}^8 = x$ (v) $\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = y$

3. కింది వాని విలువలను గణించండి.

(i) $\log_{25} 5$ (ii) $\log_{81} 3$ (iii) $\log_2 \left(\frac{1}{16}\right)$

(iv) $\log_7 1$ (v) $\log_x \sqrt{x}$ (vi) $\log_2 512$

(vii) $\log_{10} 0.01$ (viii) $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{8}{27}\right)$

4. కింది వానిని log N రూపంలోనికి సూక్ష్మీకరించి N విలువను కనుగొనండి. (మీరు సంవర్గమానభూమిగా 10 ని తీసుకోవచ్చు. కాని ఏ భూమికైననూ ఫలితాలు తుల్యమవుతాయి)

(i) $\log 2 + \log 5$ (ii) $\log 16 - \log 2$ (iii) $3 \log 4$

(iv) $2 \log 3 - 3 \log 2$ (v) $\log 243 + \log 1$ (vi) $\log 10 + 2 \log 3 - \log 2$

5. కింది వానిని విస్తరించి రాయండి.

(i) $\log 1000$ (ii) $\log \left(\frac{128}{625}\right)$ (iii) $\log x^2 y^3 z^4$

(iv) $\log \frac{p^2 q^3}{r}$ (v) $\log \sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

1.5.4 సంవర్గమానాలకు ప్రామాణిక భూములు (ఆధారం) (పరీక్షలకొరకు ఉద్దేశించబడినవి కావు)

సంవర్గమానాలకు మనం సాధారణంగా రెండు ఆధారాలతో (భూములు) నిర్వచిస్తాము. ఇవి **భూమి 10 మరియు భూమి e**

సంవర్గమానాలకు మనం ఒక సమాసం $\log x$ అని వ్రాస్తే దానిని భూమి 10గా వ్రాసామని అర్థం. క్యాలిక్యులేటర్లలో ముందుగానే సంవర్గమానాలకు తగిన ప్రోగ్రాం చేయబడి 'log' అనే 'కీ' ఉంటుంది. ఇది నొక్కితే ఒక సంఖ్యకు 10 భూమిగా గల సంవర్గమానవిలువ తెలుస్తుంది.

ఉదాహరణకు

$\log 2 = 0.301029995664\ldots$

$\log 3 = 0.4771212547197\ldots$

log 2 మరియు log 3 కరణీయసంఖ్యలేనా?

ఇక రెండవ సంవర్గమాన భూమి 'e'. ఈ గుర్తును మనం ఘాతాంక స్థిరాంకం అంటాము. ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య. ఇది అనంతంగా వుండి అంతంకాని, ఆవర్తనం చెందని దశాంశంగా వుంటుంది. దీని విలువ సుమారుగా 2.718 గా తీసుకుంటారు. భూమి 'e' ని మనం ఎక్కువగా శాస్త్ర, గణిత అనువర్తనాలలో వినియోగిస్తారు. భూమి 'e' గా గల సంవర్గమానాలు అంటే $\log_e$ ను మనం సూక్ష్మంగా 'ln' అని సూచిస్తాము. కావున "$\ln x$" భూమి 'e'గా కలిగిన సంవర్గమానం అని అర్థము. ఇటువంటి సంవర్గమానాలను "సహజ సంవర్గమానాలు" అంటారు. క్యాలిక్యులేటర్లలో 'ln' అనే 'కీ' సహజ సంవర్గమాన విలువలు తెలుపుతుంది.

ఉదాహరణకు

$\ln(2) = 0.69314718055 99\ldots$

$\ln(3) = 1.0986122886681\ldots$

ln(2) మరియు ln(3) కరణీయాలేనా?

1.5.5 సంవర్గమానాల అనువర్తనాలు (పరీక్షలకొరకు ఉద్దేశించబడినవి కావు)

సంవర్గమానాల అనువర్తనాలను క్రింది కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా అవగాహన చేసుకుందాం.

ఉదాహరణ-15. భూకంప తీవ్రతను $M=\log\frac{I}{S}$ అనే సమీకరణ ద్వారా కనుగొనవచ్చునని 1935 సం॥లో చార్లెస్ రిక్టర్ నిర్వచించాడు. ఇందులో 'I' అనేది భూకంప తీవ్రత యొక్క కుదుపు మరియు 'S' అనేది "భూకంప కేంద్రం వద్ద తీవ్రత" ను తెలుపుతాయి.

(a) భూ కంప కేంద్రం వద్ద తీవ్రత కన్నా, భూకంప తీవ్రత యొక్క కుదుపు 10 రెట్లు వున్నచో తీవ్రతను కనుగొనండి.

(b) భూకంప తీవ్రత రిక్టర్ స్కేలుపై 10 గా నమోదైతే కేంద్రం వద్ద తీవ్రతకు ఎన్నిరెట్లు కుదుపుగా వున్నట్లు చెప్పవచ్చును?

సాధన :

(a) భూకంపతీవ్రత కుదుపును 'I' గా తీసుకుంటే

$I = 10\,S$ అగును

భూకంప తీవ్రత కనుగొనుటకు

$M = \log\frac{I}{S}$ సూత్రం ఉపయోగిస్తే

∴ భూకంప తీవ్రత

$$M = \log\frac{I}{S}$$

$$= \log 10$$

$$= 1$$

(b) సాధారణ భూకంప తీవ్రత (కేంద్రం వద్ద ఏర్పడినది) కన్నా భూకంప తీవ్రత యొక్క కుదుపు x రెట్లు వున్నదనుకుంటే

భూకంప కుదుపు తీవ్రత $\mathrm{I} = xS$ అగును

మనకు

$$\mathrm{M} = \log \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{S}}$$ అని తెలుసు

కావున భూకంప తీవ్రత

$$\mathrm{M} = \log \frac{xs}{s}$$

లేదా $\mathrm{M} = \log x$

మనకు $\mathrm{M} = 10$ అని ఇవ్వబడింది.

కావున $\log x = 10$ అందువలన $x = 10^{10}$ అగును.

ప్రయత్నించండి

ఒక ద్రావణం యొక్క pH విలువను కనుగొనుటకు మనం $\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H+}]$ అని వాడతాము. ఇందులలో pH అనేది ద్రావణం యొక్క ఆమ్ల స్వభావంను మరియు H^+ అనేది హైడ్రోజన్ అయాన్ గాఢతను తెలియజేస్తుంది.

(i) శంకర్ అమ్మమ్మ వాడే లక్స్‌సబ్బులలో హైడ్రోజన్ అయాన్ గాఢత $9.2 \times 10^{(-12)}$ అయితే దాని pH విలువ ఎంత?

(ii) టమాట పండు యొక్క pH విలువ 4.2 అయితే దానిలో హైడ్రోజన్ అయాన్ గాఢత ఎంత ఉంటుంది?

ఐచ్ఛిక అభ్యాసం

[పరీక్షల కొరకు నిర్దేశించబడినది కాదు]

1. n ఒక సహజ సంఖ్యగా కలిగిన సంఖ్య 6^n యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 5 ఉంటుందా? కారణాలు తెలపండి.
2. $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ అనేది సంయుక్త సంఖ్య అగునా? నీ జవాబును సమర్థించండి.
3. ఏ సహజ సంఖ్య 'n' కైననూ 12^n యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో '0' అంకె వుంటుందో, లేదో సరిచూడండి.
4. ఏదైనా ధనపూర్ణ సంఖ్య n గా కలిగిన సంఖ్యలు $n, n+2$ లేదా $n+4$ లలో ఏదో ఒక సంఖ్య3చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడునని నిరూపించండి.
5. $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి. ఇదేవిధంగా $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$ అకరణీయమగునో, కరణీయమగునో సరిచూడండి.

6. భాగహారం చేయకుండానే, కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశరూపంలో రాయునపుడు ఎన్ని అంకెల తర్వాత అంతమొందే దశాంశాలుగా ఏర్పడతాయో తెలపండి. తర్వాత భాగహారం చేసి సరిచూడండి. ఏమి గమనిస్తారు?

(i) $\frac{5}{16}$ (ii) $\frac{13}{2^2}$ (iii) $\frac{17}{125}$ (iv) $\frac{13}{80}$ (v) $\frac{15}{32}$ (vi) $\frac{33}{2^2 \times 5}$

7. $x^2 + y^2 = 6xy$ అయిన $2 \log (x + y) = \log x + \log y + 3 \log 2$ అని చూపండి.

8. $\log_{10} 2 = 0.3010$ అయిన 4^{2013} సంఖ్యలో ఎన్ని అంకెలుంటాయో తెలపండి.

గమనిక : ఒక సంఖ్య సంవర్గమానంలో పూర్ణాంక భాగం గురించి, దశాంశ భాగం గురించి మీ ఉపాధ్యాయునిని అడిగి తీసుకొండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రకారం "ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యను ప్రధాన సంఖ్యల కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్యక్తపరచవచ్చును మరియు ప్రధానకారణాంకాల వరుసక్రమం ఏదైనప్పటికీ ఇది ఏకైకం" అని నిర్వచింపవచ్చును

2. p ఒక ప్రధాన సంఖ్య మరియు a ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య అయి వుండి a^2ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తే అప్పుడు a ను p నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

3. x ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు దీని దశాంశ రూపం ఒక అంతమైదే దశాంశం అయినపుడు x ను p, q లు పరస్పర ప్రధానాంకాలు అయివున్న $\frac{p}{q}$ రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చును మరియు p మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధం 2^n5^m అగును ఇందులో n, m లు రుణేతర పూర్ణసంఖ్యలు.

4. n, m లు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధ రూపం 2^n5^m కలిగినటువంటి అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతమయ్యే దశాంశం అగును.

5. n, m లు రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు q యొక్క ప్రధాన కారణాంకముల లబ్ధం 2^n5^m రూపంలో లేకుంటే, అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{p}{q}$ అయిన, x యొక్క దశాంశరూపం ఒక అంతం కాని ఆవర్తన దశాంశం అగును.

6. a, x లు ధన పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు $a \neq 1$ అయివుండి $a^n = x$ అయిన మనం $\log_a x = n$ అని నిర్వచిస్తాం.

7. సంవర్గమాన న్యాయాలు

(i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(iii) $\log_a x^m = m \log_a x$

8. సంవర్గమానాలను అన్ని రకాల గణిత ప్రక్రియలలో ముఖ్యంగా ఇంజనీరింగ్, సైన్సు, వ్యాపారం, అర్థశాస్త్రంలలో విరివిగా వినియోగిస్తారు.