అనుబంధం

గణిత నమూనా విధానాలు

(Mathematical Modelling)

A.I.1 పరిచయం

శాస్త్ర, సాంకేతిక రంగాలలో అమెరికా, రష్యా, జపాన్ వంటి అగ్రదేశాల సరసన నిలిచిన భారతదేశంలో ఫిబ్రవరి 25, 2013న ఇస్రో (భారత అంతరిక్ష పరిశోధనా సంస్థ) వారు PSLV C20, అనే వాహన నౌక ద్వారా సరల్ (SARAL) అనే ఉపగ్రహంను కక్ష్యలో ప్రవేశపెట్టినారు. ఈ శాటిలైట్ యొక్క బరువు సుమారు 407 కి.గ్రా మరియు ఇది భూమి నుండి 781 కి.మీ ఎత్తులో ఉంటూ 98.5^{o} ల కోణంతో కక్ష్యలో పరిభ్రమణం చేస్తుంది.

పై సమాచారాన్ని చదివిన మనకు సహజంగానే కొన్ని సందేహాలు తలెత్తుతాయి. అవి ఏంటంటే

(i) శాస్త్రవేత్తలు, శాటిలైట్ 781కిమీల ఎత్తులో పరిభ్రమిస్తుందని అంత ఖచ్చితంగా ఎలా చెప్పగలిగారు. నిజంగానే వారు అంతరిక్షానికి వెళ్ళి దూరాన్ని కొలిచి చూశారా ?

(ii) భ్రమణ కోణం 98.5^{o} లు అని ఎలా నిర్ధారించగలిగారు ?

మన నిజజీవితంలోని కొన్ని అద్భుతమైన విషయాలు, మనల్ని ఆశ్చర్యచకితుల్ని చేస్తాయి. అసలు గణిత మేధావులు గాని శాస్త్రవేత్తలు గాని ఇంత ఖచ్చితంగా ఈ విలువలను ఎలా అంచనా వేయగలిగారు ? అని మనం నివ్వెర పోతాము. అలాంటి ఉదా॥లు కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాము.

(i) సూర్యుని ఉపరితలంపైన ఉష్ణోగ్రత దాదాపు 6,000°C ఉంటుంది.

(ii) మానవుని గుండె ప్రతీ నిమిషానికి ఒకసారి 5 నుండి 6 లీ॥ల రక్తాన్ని శుద్ధి చేస్తుంది.

(iii) సూర్యునికి, భూమికి మధ్య దూరము 1,49,000 కిమీ॥లు.

పైన పేర్కొన్న ఉదా॥లలో ఏ శాస్త్రవేత్త కూడ సూర్యుని పైకి వెళ్ళి అక్కడి ఉష్ణోగ్రతను కొలవలేదు. అదేవిధంగా మనిషి గుండెను బయటకు తీసి అది ఎన్ని లీ॥ల రక్తాన్ని శుద్ధి చేస్తుందో పరిశీలించలేదు.

మరి ఇలాంటి ప్రశ్నలకు ఇంత ఖచ్చితమైన సమాధానాన్ని ఎలా చెప్పగలిగారు ?

"గణితనమూనా విధానం" ద్వారా ఇలాంటి ఊహకు అందని ప్రశ్నలకు ఖచ్చితమైన పరిష్కారాన్ని కనుక్కోగల్గుతాము.

"గణితనమూనా విధానం అనేది కేవలం శాస్త్రజ్ఞులు, మేధావులకు మాత్రమే ఉపయోగపడుతుందనుకోవడం పొరపాటే అవుతుంది. ఎందుకంటే మన నిజజీవితంలో ఎన్నో సందర్భాలలో గణిత నమూనా ప్రక్రియను ఉపయోగించి మన సమస్యలను పరిష్కరించుకుంటాము. ఉదా॥కు మనం రూ. 100 లను వేరేవారికి 10% వడ్డీ రేటు చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి అప్పుగా ఇస్తే 1 సం॥ కాలం తర్వాత మనకు ఎంత డబ్బు వస్తుందో తెలుసుకోవాలి, లేదా మన ఇంటి గది గోడలన్నింటికి రంగు వేయించాలంటే ఎన్ని లీ॥ల పెయింట్ అవసరమో కనుక్కునే సందర్భాలలో మనకు గణిత నమూనా ప్రక్రియ ఉపయోగపడుతుంది.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

మనం నేరుగా కొలవలేని సందర్భాలలో గణిత నమూనా ప్రక్రియను ఉపయోగించి ఖచ్చితమైన విలువలను అంచనా వేయగలిగిన, నిజజీవిత సన్నివేశాలలోని మరికొన్ని ఉదా॥లను మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

A.II.2 గణిత నమూనాలు

త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుగొనుటకు ఏ సూత్రం వాడుతామో మీకు గుర్తుందా ?

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు కదా !

అదే విధంగా సాధారణ వడ్డీ కనుగొనుటకు సూత్రం $I = \frac{PTR}{100}$; ఈ సూత్రం లేదా సమీకరణం అనేది వడ్డీ (I); అసలు(P); కాలం (T); మరియు వడ్డీ రేటు (R). ల మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని సూచిస్తుంది.

ఈ సూత్రాలను మనం గణిత నమూనాలకు ఉదాహరణలుగా చెప్పుకోవచ్చు.

గణిత నమూనాలకు సంబంధించి మరికొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

(i) వేగం (S) = $\frac{\text{దూరం (d)}}{\text{కాలం (t)}}$

(ii) చక్రవడ్డీలో మొత్తం $(A) = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

ఇచట P = అసలు

r = వడ్డీరేటు

n = వడ్డీ కట్టే పర్యాయముల సంఖ్య

కాబట్టి,

> నిజజీవిత సందర్భాలలో మనం ఉపయోగించే గణిత వివరణలు లేదా గణిత సూత్రాలే "గణిత నమూనాలు".

ఇవి చేయండి

మీరు క్రింది తరగతులలో నేర్చుకున్న "గణిత నమూనాలు" కొన్నింటిని రాయండి.

A.I.3 గణిత నమూనా విధానం

మన దైనందిన జీవితంలోని కొన్ని సందర్భాలలో సమస్యలను ఎదుర్కొవాల్సి వస్తుంది. వాటిని పరిష్కరించుకోవడానికి మనం ఆ సమస్యకు సరిపడు గణిత సమీకరణంను రాసుకొని దాని సాధనను కనుగొంటాము. తర్వాత దశలో మనం కనుగొన్న సాధన; మన సమస్యకు పరిష్కారంగా సరిపోతుందో లేదో విశ్లేషించుకుంటాము. ఈ విధంగా ఒక గణిత నమూనాను నిర్మించుకొని; దాని ఆధారంగా సమస్యను సాధించే విధానంనే "గణిత నమూనా విధానం"గా వ్యవహరిస్తాము.

ఇప్పుడు గణితనమూనా విధానాలు సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-1. వాణి; ₹ 19,000 ధర కలిగిన ఒక వాషింగ్ మెషిన్‌ను కొనాలని అనుకొన్నది. కాని ఆమె వద్ద కేవలం ₹ 15,000 మాత్రమే ఉన్నాయి. మిగిలిన డబ్బుల కోసం ఆమె తన వద్ద ఉన్న రూపాయలను సం॥నికి 8% వడ్డీరేటు చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి అప్పుగా ఇవ్వాలనుకుంది. అయితే ఎన్ని సం॥ల తర్వాత వాణికి మిగిలిన డబ్బులు వచ్చి, తాను అనుకున్న వాషింగ్‌మెషిన్ కొనగలదు?

సాధన :

సోపానం 1 : (సమస్యను అవగాహన చేసుకోవడం): ఈ సోపానంలో మనం సమస్యను అర్థం చేసుకొనే ఏయే అంశాలు ఇవ్వబడ్డాయి ? ఇంకా ఏమి కనుగొనాల్సి ఉందో తెలుసుకుంటాము. ఈ సమస్యలో మనకు అసలు, వడ్డీరేటు ఇవ్వబడ్డాయి. వాణి అప్పుగా ఇచ్చిన అసలు ₹ 15,000; ఎన్ని సం॥ల తర్వాత ₹ 19000 అవుతాయో మనం కనుగొనాలి.

సోపానం 2 : (గణితపరమైన వివరణ మరియు సూత్రీకరణ) ఈ సోపానంలో ఇచ్చిన సమస్యలోని వివిధ పదాలకు విస్తృతార్థంలో వివరణ రాసుకొని చరరాశులను గుర్తిస్తాము. సమస్యకు సరిపడు సమీకరణం లేదా అసమీకరణాలను రాసుకొని అవసరమైన సమాచారాన్ని సేకరిస్తాము.

ఈ సమస్యలో మనం సాధారణ వడ్డీకి సంబంధించిన సూత్రం

$I = \dfrac{PTR}{100}$ (నమూనా) ను ఉపయోగిస్తాము. దీనిలో

P = అసలు T = కాలం (సం॥లలో) R = వడ్డీరేటు I = సాధారణ వడ్డీ

ఈ నమూనాలో మనం కాలం (T)ని కనుగొనాల్సి ఉంది. $T = \dfrac{100I}{RP}$ అవుతుంది.

సోపానం 3: (గణిత సమస్యను సాధించడం) : ఈ సోపానంలో, 2వ సోపానంలో అభివృద్ధి పరిచిన సూత్రాన్ని ఉపయోగించుకొని సమస్యను సాధిస్తాము. వాణి వద్ద ప్రస్తుతం ఉన్న డబ్బు కేవలం ₹ 15,000 మాత్రమే అని మనకు తెలుసు. ఇదే మనకు సమస్యలో అసలు (P) అవుతుంది.

₹ 19000 విలువ గల వాషింగ్‌మెషిన్ కొనడానికి వాణికి ఇంకా 19,000-15,000 = 4,000 అవసరం. అంటే ఇది వడ్డీ (I) కి సమానం.

$$P = ₹15,000 \quad R = 8\%, \quad I = 4000\ , \quad T = \frac{100 \times 4,0\cancel{00}}{15,0\cancel{00} \times 8} = \frac{400}{12\cancel{0}}\ , \quad T = 3\frac{4}{12} = 3\frac{1}{3} \text{ సం॥లు}$$

సోపానం 4 : (సాధనను విశ్లేషించుకోవడం): పై సోపానంలో వచ్చిన సాధనను ఈ సోపానంలో విశ్లేషించుకుంటాము.

ఇక్కడ మనకు T = $3\frac{1}{3}$ సం॥లు అని వచ్చింది. అంటే 3సం॥లు మరియు ఇంకా సం॥లో 3వ వంతు అని లేదా 3 సం॥ల 4నెలలు అని అర్థం. అంటే వాణి 3 సం॥ల 4 నెలల తర్వాత తాను అనుకొన్న వాషింగ్ మెషిన్ కొనగలదు.

సోపానం 5 : (నమూనా యొక్క విశ్వసనీయత): సమస్యా సాధనలో వచ్చిన సాధన (ఫలితం) నిజజీవితానికి సరిపోతుందని అన్నిసార్లు విశ్వసించలేము. ఒక వేళ సాధన మనకు సరిపోదని అనిపిస్తే మళ్ళీ మళ్ళీ మన నమూనాని పరీక్షించుకుంటూ దానిని మెరుగుపరుచుకోవచ్చు.

ఈ సమస్యను సాధించే క్రమంలో మనం సమస్యలోని 2 అంశాలు ఎప్పటికీ మారవని ఊహించుకొని సమస్యను సాధించాము అవి i) వడ్డీరేటు ii) వాషింగ్ మెషిన్ ధర ప్రతీ సం॥ ₹ 19,000 ఉండడం. ఒకవేళ ఈ రెండు విలువలు మారితే $\frac{PTR}{100}$ అనే నమూనా మనకు వర్తించదు.

ఉదాహరణ-2. లోకేశ్వరం ఉన్నతపాఠశాలలో 10వ తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థులు మరియు వారి గణిత ఉపాధ్యాయుడు కలిసి లోకేశ్వరం నుండి హైదరాబాద్‌కు విహార యాత్రకు వెళ్ళాలని నిర్ణయించుకున్నారు. అయితే ఒక్కొక్క వాహనంలో డ్రైవర్ కాకుండా కేవలం 6 గురు వ్యక్తులు మాత్రమే కూర్చోగలరు. అయిన వారు ఎన్ని వాహనాలు అద్దెకు తీసుకోవాలి.

సోపానం 1 : ఈ సమస్యలో ఒక్కొక్క వాహన సామర్థ్యం డ్రైవర్ కాకుండా 6గురు వ్యక్తులు ఇవి ఇవ్వబడింది. 51 మంది ప్రయాణించడానికి అవసరమగు వాహనాల సంఖ్యను మనం కనుగొనాల్సి ఉంది.

సోపానం 2 : వాహనాల సంఖ్య = (మొత్తం వ్యక్తులు) / (ఒక్కొక్క వాహన సామర్థ్యం)

సోపానం 3 : వాహనాల సంఖ్య = 51/6 = 8.5

సోపానం 4 (వ్యాఖ్యానం/విశ్లేషణ): వాహనాల సంఖ్య 8.5 గా ఉండదని మనకు తెలుసు. కాబట్టి వారు అద్దెకు తీసుకోవాల్సిన వాహనాల సంఖ్య, 8.5కు దగ్గరి పూర్ణాంకమైన 9 గా ఉండాలి

$\therefore$ కావాల్సిన వాహనాల సంఖ్య = 9

సోపానం 5 (విశ్వసనీయత) : ఈ గణిత నమూనాలో మనం సన్నగా ఉన్న విద్యార్థులు; లావుగా ఉన్న విద్యార్థులు అందరూ సమాన స్థలాన్ని ఆక్రమించి కూర్చుంటారని భావించి సమస్యను సాధించాము. అలా భావించకపోతే ఈ నమూనా మనకు ఉపయోగపడదు.

ప్రయత్నించండి

1. మీ గణిత పాఠ్యపుస్తకంలోని ఏదైనా ఒక రాత సమస్యను తీసుకొని దానికి గణిత నమూనాను తయారు చేసి ఆ సమస్య సాధనను కనుగొనండి.
2. ఒక కారు 'A' అనే స్థానం నుండి బయలుదేరి 40 కి.మీ/గం. వేగంతో ప్రయాణించి "B" అనే గమ్యస్థానాన్ని చేరుకుంది. అదే సమయంలో మరో కారు "B" నుండి బయలుదేరి 30 కి.మీ/గం॥ వేగంతో A వైపుకు బయలుదేరింది. A, B ల మధ్యదూరం 100 కి.మీలు అయితే ఆ రెండు కార్లు ఎంత సమయం తర్వాత కలుసుకుంటాయి ?

   పై సమస్యకు గణిత నమూనాను తయారుచేసి సాధించండి.

ఇప్పటి వరకు మనం సరళమైన రాత సమస్యలకు "గణిత నమూనాలు" తయారు చేశాము. ఇప్పుడు ఒక నిజజీవిత సమస్యను తీసుకొని దానికి గణిత నమూనాను ఎలా తయారుచేయాలో చూద్దాం!

ఉదాహరణ-3. 2000 సం॥లో ఐక్యరాజ్య సమితిలో సభ్యత్వం గల 191 దేశాలు, లింగ వివక్షతను తగ్గించడానికి ఒక ఒప్పందంను కుదుర్చుకున్నాయి. అందులో భాగంగా ప్రాథమిక, మాధ్యమిక పాఠశాలల్లోని బాలికల నిష్పత్తిని పెంచాలని లక్ష్యంగా నిర్ణయించుకున్నాయి. ఈ ఒప్పందంపై భారతదేశం కూడా సంతకం చేసింది. భారతదేశంలో వివిధ సం॥లలో ప్రాథమిక పాఠశాలల్లోని బాలికల నమోదు శాతం క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది.

పట్టిక A.I.1

సంవత్సరం	నమోదు(శాతంలో)
1991 – 92	41.9
1992 – 93	42.6
1993 – 94	42.7
1994 – 95	42.9
1995 – 96	43.1
1996 – 97	43.2
1997 -98	43.5
1998 – 99	43.5
1999 – 2000	43.6
2000 – 01	43.7
2001 - 02	44.1

పై సమాచారం ఆధారంగా ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో బాలికల నమోదు స్థాయి ఏ రేటున పెరుగుతుందో తెల్పి, 50% నమోదును ఏ సం॥లో చేరుతామో అంచనా వేయండి.

సాధన :

సోపానం 1 : (సూత్రీకరణ) మొదట ఈ సమస్యను గణిత సమస్యరూపం లోకి మార్చుకోవాలి.

పట్టిక A1.1 మనకు 1991 – 92, 1992- 93 మొ॥లగు సం॥లలో ఉన్న నమోదు శాతాన్ని తెల్పుతుంది. దీనిలో మనం విద్యా సంవత్సరాలను 1991, 1992 గా తీసుకోవచ్చు. పట్టిక A1.1 లో సూచించిన విధంగా ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో బాలికల నమోదు శాతం ఒకే రేటులో పెరగుతుందని అనుకుందాం. అపుడు మనకు ఏఏ సం॥ల మధ్య 50% నమోదు స్థాయిని చేరగలం అనడం కంటే ఎన్ని సం॥లలో అంత నమోదు స్థాయికి చేరగలం అనేది ముఖ్యం. (ఉదాహరణకు ₹ 15000 లను సం॥నకు 8% వడ్డీ రేటు చొప్పున 3 సం॥లకు సాధారణ వడ్డీకి ఇస్తే. ఆ 3 సం॥లు 1999–2002 లేదా 2001–2004 అనేది అప్రస్తుతం. ఇక్కడ వడ్డీ రేటు; ఎన్ని సం॥లకు వడ్డీకి ఇస్తున్నాం అనేదే ముఖ్యము).

అదే విధంగా ఈ సమస్యలో కూడా 1991 తో పోల్చితే మిగిలిన సం॥లలో నమోదు స్థాయి ఎలా పెరిగిందని చూడాలి. దానికి మనం 1991 ను 0 సం॥గా మరియు 1992 ను 1గా సూచిద్దాం. ఎందుకంటే 1991 తర్వాత 1 సం॥ గడిచింది కాబట్టి. అదే విధంగా 1993 ని 3 గాను 1994 ను 4 చేత సూచిద్దాము. అప్పుడు పట్టిక ఇలా మారుతుంది.

పట్టిక A.I.2

సంవత్సరం	నమోదు(శాతంలో)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

ఒక్కొక్క సంవత్సరంలో నమోదు శాతం ఎంత పెరిగిందో క్రింది పట్టిక A.I.3లో ఇవ్వబడింది.

పట్టిక A.I.3

సంవత్సరం	నమోదు(శాతంలో)	పెరుగుదల
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 నుండి 1992 సం॥ల మధ్య మొదట సం॥ల కాలంలో నమోదు శాతం 41.9% నుండి 42.6% కు అంటే 0.7% పెరిగింది. 2వ సం॥ చివర 42.6% నుండి 42.7% కు అంటే 0.1% పెరిగింది. పై పట్టికను ఆధారంగా చేసుకొని సంవత్సరాలకు మరియు నమోదుశాతానికి ఒక ఖచ్చితమైన సంబంధాన్ని ఏర్పరచలేము. కాని పెరుగుదల అనేది ఒక్క మొదటి, చివరి సం॥లలో తప్ప మిగిలిన సం॥లలో స్థిరంగా ఉంది.

ఈ పెరుగుదల శాతాల యొక్క సరాసరి తీసుకుంటే

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10}=0.22 \qquad \text{.... (1)}$$

సరాసరి 0.22 కాబట్టి నమోదు శాతం స్థిరంగా 0.22% చొప్పున పెరుగుతుందని అనుకుందాం.

సోపానం 2 : (గణిత పరమైన వివరణ)

ప్రతీ సం॥ నమోదు శాతంలో స్థిరమైన పెరుగుదల 0.22% ఉందని అనుకున్నాం కాబట్టి

మొదటి సం॥ తర్వాత నమోదు శాతం $= 41.9 + 0.22$

రెండవ సం॥ తర్వాత ,, ,, $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

మూడవ సంవత్సరం ,, ,, $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

"n"వ సం॥ తర్వాత నమోదు శాతం $= 41.9 + 0.22n,\ n \geq 1.$ .... (2)

పై సమస్యలో మనం 50% నమోదు ఎన్ని సం॥లకు చేరుతుందో కన్గొనాలి. కాబట్టి మనం "n" విలువను క్రింది సూత్రం (నమూనా) ద్వారా రాబట్టవచ్చు.

$$50 = 41.9 + 0.22n$$

సోపానం 3 : సాధన **:** "n" విలువ కోసం పై సమీ॥ను సాధించగా

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

సోపానం 4 : (వివరణ): సం॥ల సంఖ్య దశాంశ రూపంలో ఉండదు కాబట్టి 36.8 కి దగ్గరగా ఉన్న పూర్ణాంకం 37 ను సం॥ల సంఖ్యగా తీసుకుంటాం. అంటే నమోదు శాతం 50% ని చేరే సం॥ $1991 + 37 = 2028$.

సోపానం 5 : (విశ్వసనీయత): మనం నిజ జీవిత సమస్యను సాధిస్తున్నాం కాబట్టి మనకు వచ్చిన ఫలితం ఈ సమస్యకు ఎంతమేరకు సరిపోతుందో సరిచూసుకోవాలి.

సోపానం 2 లో వచ్చిన ఫలితం మనం వాస్తవం అని అనుకుందాము. సమస్యలో ఇచ్చిన విలువలతో; సోపానం 2 ఆధారంగా వచ్చిన విలువలను పోల్చుకొని చూద్దాం. ఈ విలువలు క్రింది పట్టిక A.I.4 లో ఇవ్వబడ్డాయి.

పట్టిక A.I.4

సంవత్సరం	నమోదు (శాతంలో)	సోపానం 2 ఆధారంగా వచ్చిన విలువలు(శాతంలో)	భేదం (శాతంలో)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

పై పట్టిక ఆధారంగా వాస్తవ విలువల కన్న; సోపానం 2 ఆధారంగా వచ్చిన విలువలు 0.3% లేదా 0.5% శాతం కంటె తక్కువగా ఉన్నట్లు మనం గమనించవచ్చు. ఈ తేడా వల్ల వచ్చే సమస్య ఏమిటంటే మనకు కావల్సిన సం॥ల సంఖ్యలో 3 నుండి 5 సం॥ల తేడా వస్తుంది. ఎందుకంటే వాస్తవ పెరుగుదల 1% నుండి 2%. మాత్రమే ఉంది. ఒకవేళ మనం ఇంత తేడాను అంగీకరిస్తే కనుక సోపానం 2 లో వచ్చినదే మనకు కావాల్సిన "గణిత నమూనా" అవుతుంది. అలా కాక ఈ తేడాను ఇంకా తగ్గించదలచుకుంటే ఈ నమూనాను మళ్ళీ మనం మెరుగుపరుచుకోవచ్చు. దానికోసం మళ్ళీ సోపానం 2కు వెళ్ళి సమీకరణాన్ని మార్చాల్సి ఉంటుంది.

అలా మర్చి చూద్దామా !

సోపానం 1 : (సమీకరణ పునరుత్పాదన) : మనం; నమోదు రేటు 0.22%, చొప్పున స్థిరంగా ఉందనుకొన్నప్పటికి ఈ దోషాన్ని సవరించుటకు ఒక స్థిరాంకాన్ని ప్రవేశపెడదాము. దాని కోసం పై పట్టికలో వచ్చి "భేదంల" యొక్క సరాసరిని తీసుకుందాము.

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

ఈ బేధాల యొక్క సరాసరి సహాయంతో మళ్ళీ మన సూత్రాన్ని సరిదిద్దుకోవచ్చు లేదా మెరుగుపరుచుకోవచ్చు.

వివరణ యొక్క పునఃసమీక్ష : సోపానం 2లో వచ్చిన విలువలన్నింటికి మనకు వచ్చిన సరాసరిని కలపడం వల్ల క్రింది సరైన సూత్రం లభిస్తుంది.

'n' వ సం॥లో నమోదు శాతం

$$= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n, \text{(ఇక్కడ } n \geq 1) \quad \ldots (3)$$

అపుడు, మొదట వచ్చిన సమీకరణం (2); ఇలా మారుతుంది.

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad \ldots (4)$$

సవరించిన సాధన :

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

వివరణ : n = 36 వచ్చింది కాబట్టి ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో బాలికల నమోదుశాతం 50% కి; 1991 + 36 = 2027 లో చేరుతుంది.

సాధన యొక్క విశ్వసనీయత : మరొక్కసారి సమీకరణం (4) ద్వారా వచ్చిన విలువలతో వాస్తవ విలువలను పోల్చుకుంటే పట్టిక A.I.5 లోని విలువలు వస్తాయి.

పట్టిక A.I.5

సం॥	నమోదు (శాతం)	సమీకరణం(2)ద్వారా వచ్చినవిలువలు	భేదం	సమీకరణం(4) వచ్చిన విలువలు	భేదం
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1	44.10	0.00	44.28	-0.18

పట్టికను జాగ్రత్తగా గమనిస్తే సమీకరణం (4) ద్వారా వచ్చిన విలువలు సమీకరణం (2) ద్వారా వచ్చిన విలువ కంటె కూడా వాస్తవ విలువలకు చాలా దగ్గరగా ఉన్నాయి. అంటే ఇక్కడ భేదాల సరాసరి "0"గా చెప్పవచ్చు.

A.I.4 గణిత నమూనా విధానం యొక్క ఉపయోగాలు

1. ఒక నిజ జీవిత సమస్యను గణిత సమస్యగా మార్చుకొని, దానిని సాధించి ముఖ్యమైన సమాచారంను రాబట్టడమే "గణిత నమూనా విధానం" యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యము. ప్రత్యక్ష పరిశీలన ద్వారా లేదా ప్రయోగాలు నిర్వహించి గాని; అత్యంత ఖర్చుతో కూడుకొని ఉన్న సందర్భంలో గాని సమాచార సేకరణ కష్టం అయినపుడు 'గణిత నమూనా విధానం" చాలా ఉపయోగకరము.

   ఉదా॥కు ఆగ్రాలో ఉన్న తాజ్‌మహల్ పైన "మథుర" నూనె శుద్ధి కర్మాగారం యొక్క కాలుష్య ప్రభావాన్ని తెలుసుకోవాలంటే తాజ్‌మహల్ పైన ప్రత్యక్షంగా ప్రయోగాలు చేయలేము. ఎందుకంటే దాని వల్ల ఒక అద్భుతమైన కట్టడానికి ప్రమాదం వాటిల్లే అవకాశం ఉంది. ఇలాంటి సందర్భంలో గణిత నమూనా విధానంను ఉపయోగించుకోవచ్చు.

2. అనేక రకాల సంస్థలు గాని వ్యవస్థలు గాని ముందస్తు ప్రణాళికతో పని చేస్తాయి. ఎందుకంటే కీలక నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలో భవిష్యత్ ప్రణాళిక ఇమిడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు

(i) మార్కెటింగ్ రంగంలో ఏఏ వస్తువులకు ఎక్కువ డిమాండ్ ఉంటుందో ప్రణాళిక సిద్ధం చేసుకొని అమ్మకాలు పెంచుకుంటారు.

(ii) పాఠశాలల్లో విద్యార్థుల నమోదు శాతాన్ని పెంచడానికి ఏఏ ఆవాస ప్రాంతాలలో బడి ఈడు పిల్లలు ఉన్నారో ముందుగానే ప్రణాళిక సిద్ధం చేసుకొని ఆయా ప్రాంతాల్లో నూతన పాఠశాలలు ప్రారంభించాలని విద్యాశాఖ నిర్ణయించుకుంటుంది.

3. అడవిలో ఉన్న చెట్ల సంఖ్య; సరస్సులోని చేపల సంఖ్య; ఓటింగ్‌లో పోలయిన ఓట్లు చెప్పడం లాంటి అనేక సందర్భాలలో మనం "అంచనా వేయడం" అనే ప్రక్రియను ఉపయోగిస్తుంటాము.

   "గణిత నమూనా విధానం" ను ఉపయోగించే మరికొన్ని సందర్భాలను గమనిద్దాము.

(i) రాబోయే కొన్ని సం॥ల తర్వాత ఉండే భవిష్యత్ జనాభా

(ii) రాబోయే కొన్ని రోజుల్లో ఉండే వాతావరణం వివరాలు

(iii) రాబోయే కొన్ని సం॥లలో ఉండే అక్షరాస్యత శాతం

(iv) ఒక చెట్టుకు ఉండే ఆకుల సంఖ్యను ఊహించగల్గడం

(v) మహాసముద్రాల లోతును లెక్కించడం

A.I.5 గణిత నమూనా విధానం యొక్క పరిమితులు

అన్ని సమస్యలకు పరిష్కారాన్ని "గణిత నమూనా విధానం" చూపుతుందా?

ఖచ్చితంగా చూపదనే చెప్పవచ్చు. ఎందుకంటే దీనికి కూడ కొన్ని పరిమితులు ఉంటాయి. కాబట్టి దీనిని నిజ జీవిత సమస్యకు కేవలం ఒక సూక్ష్మరూపంగానే మనం గ్రహించాలి. ఒక దేశానికి సంబంధించిన పటం, అసలైన దేశంకు మధ్య భేదం ఎలా ఉంటుందో ఇది కూడా అలాగే ఉంటుంది. పటం సహాయంతో ఒక ప్రదేశం; సముద్ర మట్టం నుండి ఎంత ఎత్తులో ఉందో కనుగొనవచ్చు కాని అక్కడి ప్రజల జీవన విధానాన్ని గాని వారి లక్షణాలను గాని చెప్పలేము. ఎక్కడ అత్యవసరమో అక్కడ మాత్రమే "గణిత నమూనా ప్రక్రియ"ను ఉపయోగించగలం. గత ఉదాహరణ సమస్యలలో సాధనను కనుగొనే సందర్భంలో వడ్డీరేటు మారదని; వాషింగ్‌మెషిన్ ధర అలాగే ఉంటుందనే కొన్ని ఊహనలు చేసుకున్నాం గుర్తుందా? అంటే దీనిని బట్టి గణిత నమూనా విధానంకు కూడా పరిమితులు ఉంటాయని తెలుసుకోవచ్చు.

A.I.6 ఒక నమూనాను ఎంత మేరకు మెరుగుపరచగలం ?

ఒక గణిత నమూనాను మెరుగుపరచడంలో చాలా అంశాలను పరిగణలోనికి తీసుకోవాల్సి ఉంటుంది. ఇలా చేయడం వల్ల మన గణిత సమీకరణంలో ఇంకా కొన్ని చరరాశులు పెరిగే అవకాశం ఉంది. దాని వల్ల నమూనా క్లిష్టంగా మారి ఉపయోగించడానికి వీలు లేకుండా పోతుంది. కాబట్టి ఎప్పుడైనా ఒక గణిత నమూనా అనేది సరళంగా ఉండి ఖచ్చితంగా ఉపయోగించే విధంగా ఉండాలి. అంటే మంచి నమూనా అనేది ఎప్పుడూ కూడా వాస్తవానికి దగ్గరగా ఉండాలి.

ప్రయత్నించండి

క్రీ.శ 13వ శతాబ్దంలో లియోనార్డో ఫిబోనాకి సంబంధించిన సమస్య ఇది. ఒక సం॥కాలంలో ఉత్పత్తి చేసే కుందేళ్ళ సంఖ్యకు సంబంధించింది. ఒక కుందేళ్ళ జత ప్రతినెల చివర మరొక కుందేళ్ళ జతకు జన్మనిచ్చి, మరల ఈ జత మరొ 2 నెలల్లో మరొక జతకు జన్మనిస్తాయని అనుకుందాం. నెలనెలా ఈ జతల సంఖ్య అనేది మొదటి 2 నెలలు తప్ప మిగిలిన నెలల్లో వాటి ముందు 2 నెలల్లోని కుందేళ్ళ జత సంఖ్యకు సమానం.

కుందేళ్ళ సంఖ్య ఏవిధంగా పెరుగుతుందో క్రింది పట్టికలో చూపబడింది.

నెల	కుందేళ్ళ జతల సంఖ్య
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

ఒక సం॥కాల తర్వాత 233 జతల కుందెళ్ళు ఉంటాయి. 16 నెలల తర్వాత 1597 జతల కుందేళ్ళ ఉత్పత్తి అవుతాయి.

పై సమస్యకు “గణిత నమూనా విధానం”ను ఉపయోగించి సమస్యలోని వివిధ దశలను తెల్పండి.

ఇప్పుడు "గణిత నమూనా విధానం"ను ఉపయోగించి సాధించగల్గే మరొక ఉదాహరణను పరిశీలిద్దాము.

ఉదాహరణ-4. (పాచికలను విసరడం) : దీక్షిత మరియు ఆశిష్ ఇద్దరు కలిసి రెండు పాచికలతో ఆడుకుంటున్నారు. అప్పుడు ఆశిష్, రెండు పాచికలు విసిరిన తర్వాత వాటి ముఖాలపై ఉండే అంకెల మొత్తం ముందుగానే ఊహించి సరైన సమాధానం చెబితే దీక్షితకు మంచి బహుమతిఇస్తానని చెప్పాడు. అంకెల మొత్తం ఎంత చెబితే దీక్షిత బహుమతి గెలిచే అవకాశం ఎక్కువగా ఉంటుంది.

సాధన :

సోపానం 1 (సమస్య అవగాహన) : ఈ సమస్యలో ముందుగా 2 పాచికలను విసిరితే వాటి ముఖాలపై ఏఏ అంకెలు ఎక్కువగా పడతాయో తెలుసుకోవాల్సి ఉంటుంది.

సోపానం 2 (గణిత పరమైన వివరణ) : పాచికలపై ఏఏ సంఖ్య గల ముఖాలు పడే అవకాశం ఉంటుందో, వాటి సంభావ్యతలు ఎలా ఉంటాయో పరిశీలించాలి.

రెండు పాచికలను విసిరితే వాటి ముఖాలపై ఏఏ అంకెలు ఉండవచ్చో ముందుగానే ఊహించడం ద్వారా ఈ సమస్యకు నమూనాను సులభంగా రాసుకోవచ్చు. 2 పాచికలను ఒకేసారి విసరడం ద్వారా మనకు 36 జతలు ఏర్పడుతాయి.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

పై జతలలో మొదటి అంకె 1వ పాచిక ముఖంపై కన్పించే అంకెను, రెండవ అంకె 2వ పాచిక ముఖంపై కన్పించే అంకెను సూచిస్తుంది.

సోపానం 3 (సమస్యా సాధన) : పై జతలలోని అంకెలను కూడడం ద్వారా అంకెల మొత్తం మనకు 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 మరియు 12 వచ్చే అవకాశం ఉంది. ఈ 36 జతలలో ఏ మొత్తం పడే సంభావ్యత ఎంతో తెలుసుకోవాలి.

ఈ సంభావ్యతలను క్రింది పట్టికలో చూపుదాము.

మొత్తం	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
సంభావ్యత	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

పట్టికను నిశితంగా గమనించడం ద్వారా అంకెల మొత్తం 7 వచ్చే సంభావ్యత $\frac{1}{6}$ అని, ఇది మిగిలిన సంభావ్యతల కంటె ఎక్కువ అని చెప్పవచ్చు.

సోపానం 4 (సాధనకు వివరణ) : అంకెల మొత్తం 7 వచ్చే సంభావ్యత ఎక్కువ కాబట్టి, అంకెల మొత్తం 7 అని ఎక్కువ సార్లు చెప్పడం ద్వారా దీక్షిత బహుమతి గెలిచే అవకాశం ఎక్కువ ఉంటుంది.

సోపానం 5 (విశ్వసనీయత) : రెండు పాచికలను తీసుకొని ఎక్కువ సార్లు విసిరి ఒక పరస్పర పౌనఃపున్య పట్టిక తయారు చేయాలి. ఇప్పుడు పరస్పర పౌనఃపున్యాలను వాటి సంభావ్యతలతో పోల్చి చూడాలి. ఒకవేళ ఇవి ఏకీభవించకపోతే పాచికలు నిష్పాక్షికంగా ఉన్నాయని అంటాము.

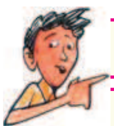
"ప్రయత్నించండి"లోని సమస్యను సాధించడానికి మనం ముందుగా తెలుసుకోవాల్సిన విషయాలు ఏమిటో చూద్దాం.

ఈ రోజుల్లో డబ్బు లేకుండా ఏ పని చేయలేము అనేది వాస్తవం మరియు ప్రతీ మనిషికి ఎదురయ్యే అనుభవమే. నిజజీవిత అవసరాలను తీర్చుకోవడానికి; సుఖమయ జీవితం గడపడానికి డబ్బు అవసరము. పరిమిత ఆదాయం గల కొనుగోలుదారులను ఆకర్షించడానికి అమ్మకందారులు అనుసరించే మార్గమే "వాయిదా పద్ధతి"

పండుగల సమయంలో అమ్మకందారులు ఎక్కువగా అమ్మకాలను పెంచుకోవడానికి ఈ పద్ధతిని ప్రవేశపెడతారు. ఈ వాయిదా పద్ధతిలో కొనుగోలుదారుడు వస్తువు యొక్క వాస్తవ రేటు కన్న ఎక్కువ ధరను చెల్లిస్తాడు. ఎందుకంటే వస్తువు కొనుగోలు సమయంలో దాని ధరలో కొంత మొత్తాన్ని చెల్లించి, మిగిలిన డబ్బును వాయిదాల రూపంలో చెల్లిస్తాడు. తర్వాత కాలంలో చెల్లించే ఈ డబ్బుపైన కొంత వడ్డీని అమ్మకందారుడు విధిస్తాడు.

మనం ఈ అధ్యాయానికి సంబంధించిన కొన్ని పదాలు తరచుగా వింటుంటాము. ఉదా॥కు వినియోగదారుడు చెల్లించే వాస్తవరేటును అమ్మకం వెల అని, వాయిదాల పద్ధతిలో కొన్నట్లయితే ప్రారంభంలో చెల్లించే ధరను "ప్రారంభ చెల్లింపు" (క్యాష్‌డౌన్ పేమెంట్) అని అంటాము.

ఇప్పుడు క్రింది "ప్రయత్నించండి" లోని సమస్యను గణిత నమూనా ప్రక్రియను ఉపయోగించి సాధించండి.



ప్రయత్నించండి

రవి తన అవసరాల నిమిత్తం ఒక సైకిల్ కొనాలని అనుకున్నాడు. మార్కెట్‌లో తనకు నచ్చిన సైకిల్ ధర ₹ 2400 గా ఉంది. కాని రవి వద్ద కేవలం ₹ 1400 మాత్రమే ఉన్నాయి. అప్పుడు షాపు యజమాని రవికి సహాయం చేయదలచి, ప్రస్తుతం ₹ 1400 చెల్లించి మిగిలిన మొత్తాన్ని నెలకు ₹ 550 చొప్పున సమాన నెలసరి వాయిదా చెల్లించమని చెప్పాడు. అయితే రవి మాత్రం ₹ 1,000 లను బ్యాంకులో సం॥నికి 12% చొప్పున సాధారణ వడ్డీకి అప్పుగా తీసుకుందాం అనుకున్నాడు. ఈ రెండు అవకాశాలలో ఏది లాభదాయ మైనదో సూచించి రవికి సహాయపడండి.