అధ్యాయము

14 సాంఖ్యకశాస్త్రం

(Statastics)

14.1 పరిచయం

గణేష్ తన తరగతిలోని 26 మంది విద్యార్థులు సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం- I గణితంలో పొందిన మార్కులను క్రింది విధముగా రిజిష్టర్‌లో నమోదు చేశాడు.

అర్జున్	76	నారాయణ	12
కామిని	82	సురేష్	24
షఫీక్	64	దుర్గా	39
కేశవ్	53	శివ	41
లత	90	రహీమ్	69
రాజేందర్	27	రాధ	73
రాము	34	కార్తీక్	94
సుధ	74	జోసెఫ్	89
కృష్ణ	76	ఇక్రం	64
సోము	65	లక్ష్మీ	46
గౌరీ	47	సీత	19
ఉపేంద్ర	54	రెహనా	53
రామయ్య	36	అనిత	69

పైన ఇవ్వబడిన దత్తాంశము వర్గీకృత దత్తాంశమా? కాదా? ఎందుకు?

వారి గణిత ఉపాధ్యాయుడు గణేష్‌ను తరగతిలో విద్యార్థులు సంగ్రహణాత్మక మూల్యాంకనం -1, గణితంలో చూపిన ప్రతిభపై నివేదిక ఇవ్వమని కోరాడు.

తరగతి విద్యార్థులు గణితంలో చూపిన ప్రతిభను అవగాహన చేసుకోవడానికి గణేష్ ఈ క్రిందివిధంగా పట్టికను రూపొందించాడు

మార్కులు	విద్యార్థి సంఖ్య
0 - 33	4
34 - 50	6
51 - 75	10
76 - 100	6

ఇపుడు, పై దత్తాంశము వర్గీకృతమా? అవర్గీకృతమా?

పై పట్టికను తన ఉపాధ్యాయునికి చూపగా, ఉపాధ్యాయుడు గణేష్‌ను మెచ్చుకున్నాడు. ఈ పట్టిక సంక్షిప్తంగా సమగ్రముగా ఉన్నదని చెప్పాడు. ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు '51-75' మధ్య మార్కులు పొందినట్లుగా తెలియుచున్నది. పట్టికను రూపొందించడంలో గణేష్ తక్కువ తరగతి అంతరాన్ని ఉపయోగిస్తే బాగుంటుందని మీరు భావిస్తున్నారా? ఎందుకు?

క్రింది తరగతులలో మీరు వర్గీకృత, అవర్గీకృత దత్తాంశాల మధ్య భేదాలను గూర్చి తెలుసుకున్నారు. అదేవిధంగా ఈ దత్తాంశాన్ని పట్టిక రూపంలో ప్రదర్శించే పద్ధతిని కూడ తెలుసుకున్నారు. మరియు అవర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క "సగటు"కనుగొనడాన్ని తెలుసుకున్నారు. ఇపుడు దీనిని మరొకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకొని వర్గీకృతదత్తాంశం యొక్క సగటు, మధ్యగతం మరియు బాహుళకములను ఎలా కనుక్కోవాలో తెలుసుకుందాం.

14.2 అవర్గీకృత దత్తాంశ సగటు

ఇవ్వబడిన రాశులు (observations)యొక్క మొత్తాన్ని రాశుల సంఖ్యచే భాగిస్తే "సగటు" వస్తుందని తెలుసుకదా! $x_1, x_2, \ldots, x_n$ రాశుల యొక్క పౌనఃపున్యాలు వరుసగా $f_1, f_2, \ldots, f_n$. అనగా x_1 అనేరాశి f_1 సార్లు. x_2 అనే రాశి f_2 సార్లు పునరావృతం అయిందని అదేవిధంగా $x_3, \ldots, x_n$ లు కూడా.

ఇపుడు, రాశుల మొత్తము $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$,

మరియు రాశుల సంఖ్య $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

కాబట్టి, ఇవ్వబడిన దత్తాంశం యొక్క సగటు $(\bar{x})$

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n}$$

పై 'సగటు'ను సంక్షిప్తంగా గ్రీకు అక్షరం (సిగ్మా) '$\sum$' ($\sum$అనగా మొత్తం) నుపయోగించి పదం సూచిస్తారో తెచ్చుకుందాము. $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

ఉదాహరణ-1. ఒక పాఠశాలలోని 10వ తరగతికి చెందిన 30 మంది విద్యార్థులు గణితంలో పొందిన మార్కులు పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. విద్యార్థులు పొందిన మార్కుల సగటు కనుక్కోండి.

పొందిన మార్కులు (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

సాధన : పై దత్తాంశాన్ని క్రింద చూపిన పట్టికలో తిరిగి వ్రాయగా

పొందిన మార్కులు (x_i)	విద్యార్థుల సంఖ్య (fi)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
మొత్తం	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

కాబట్టి, $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

$\therefore$ మార్కుల సగటు 59.3.

దైనందిన జీవితంలో చాలా సందర్భాలలో, చాలా పెద్ద పెద్ద దత్తాంశాలను సమగ్రంగా అర్థం చేసుకోవడానికి, అట్టి (అవర్గీకృత) దత్తాంశాన్ని వర్గీకృత దత్తాంశంగా మార్చుకోవాల్సిన అవసరం ఏర్పడుతుంది. అట్లు మార్చుకొని, దాని సగటును కనుగొనుటకు పద్ధతులను చర్చిద్దాము.

ఉదాహరణ-1లో ఇవ్వబడిన అవర్గీకృత దత్తాంశాన్ని, 'తరగతి అంతరం' 15 గా ఉండేటట్లుగా వర్గీకరించుకుందాం. ఇవి అవిభాజిత తరగతి అంతరాలు కావున పౌనఃపున్యాలను కేటాయించేటప్పుడు ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దుకి సమానమైన దత్తాంశాన్ని పొందిన విద్యార్థులను తరువాత తరగతిలో చూపించాలని గుర్తుంచుకోవాలి. ఉదాహరణకు 40 మార్కులు పొందిన నలుగురు విద్యార్థులు '25-40' తరగతిలో కాక, తరువాత తరగతి '40-55' లోకి తీసుకున్నాము. దీనిని దృష్టిలో ఉంచుకొని మనం వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారు చేసుకుందాం.

తరగతి అంతరం	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	7	6	6	6

తరగతి మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒక విలువ (point) మనకు అవసరం. ఒక తరగతి పౌనఃపున్యము (అనగా తరగతిలోని అన్ని రాశులు) ఆ తరగతి యొక్క మధ్యవిలువ చుట్టు కేంద్రీకృతమైనట్టు భావిస్తారు. కాబట్టి ఒక తరగతి యొక్క మధ్యవిలువను ఆ తరగతి యొక్క అన్ని విలువలను ప్రాతినిధ్యంగా భావిస్తాము. దీనినే తరగతి 'మార్కు' (class mark) లేక 'మధ్య విలువ' అంటారు. ఈ తరగతి మార్కు అనేది ఆ తరగతి యొక్క ఎగువ మరియు దిగువ అవధుల సరాసరి అని గుర్తుంచుకోవాలి.

$$\text{ఒక తరగతి మధ్యవిలువ} = \frac{\text{ఆ తరగతి ఎగువ అవధి} + \text{ఆ తరగతి దిగువ అవధి}}{2}$$

10 -25 అనే తరగతి యొక్క 'తరగతి మార్కు = $\frac{10+25}{2}$ =17.5. అదే విధంగా మిగిలిన తరగతుల యొక్క 'తరగతుల మార్కు'లను కనుగొనవచ్చు. ఈ తరగతి చిహ్నాలను x_i' గా సూచిస్తూ పట్టికలో పొందుపరుస్తాము. ఇపుడు, సగటు కనుగొనుటకు పై ఉదాహరణ మాదిరిగా ఉపగమిద్దాం.

తరగతి అంతరం	విద్యార్థులసంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	f_ix_i
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
మొత్తం	$\sum f_i$=30		$\sum f_ix_i$=1860.0

పై పట్టికలో చివరి నిలువు వరుసలలో గల విలువల మొత్తం $\sum f_ix_i$ ని సూచిస్తుంది. కాబట్టి ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క సగటు ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

సగటును కనుగొనే ఈ కొత్తపద్ధతిని 'ప్రత్యక్ష పద్ధతి' అంటారు.

పై రెండు సందర్భాలలో కూడా ఒకే దత్తాంశానికి, ఒకే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సగటును కనుగొన్నపుడు ఉదా-1లో ఖచ్చిత సగటు 59.3 కాగా, 62 అనేది సరాసరి సగటుగా పరిశీలించవచ్చు. ఈ రెండు సందర్భాలలో సగటు విలువలో భేదం ఎందుకు వచ్చిందో? ఆలోచించండి?

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

1. వర్గీకృత మరియు అవర్గీకృత దత్తాంశానికి సగటును కనుగొనవచ్చు. వీటిలో ఏది అత్యంత ఖచ్చితమైన సగటు అని నీవు భావిస్తావు? ఎందుకు?
2. దత్తాంశ విశ్లేషణకు వర్గీకృత దత్తాంశము ఎప్పుడు అనువైనది ?

కొన్ని సందర్భాలలో x_i, f_i విలువలు చాలా పెద్దగా ఉండి వాటి లబ్దాన్ని గణించడం కష్టం మరియు ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. సగటు కనుగొనుటలో గణనను సులభతరం చేయుటకు 'మరొకపద్ధతిని' గూర్చి ఆలోచిద్దాం.

మనము 'f_i'' లను మార్చే అవకాశం లేదు కాని x_i, f_i ల లబ్ధమును సులభతరం చేయుటకు 'x_i' లను చిన్నవిలువలుగా మార్చుకోవచ్చు. కాని ఇది ఎలా చేయగలం ?

ఉదా-1 లోని దత్తాంశమునకు సగటు కనుగొనుటను ఈ క్రింది పద్ధతి ద్వారా ప్రయత్నించి చూద్దాం. మొదటిసోపానంలో x_i లలోని ఒక దాని విలువను "ఊహించిన సగటు"గా ఎన్నుకొంటాము. దీనినే 'a' చే సూచిస్తాము. గణనలను మున్ముందు మరింత సులభతరం చేయడానికి $x_1, x_2, ..., x_n$ ల మధ్య విలువ 'a' ను ఎంచుకుంటాము. కావున మనం $a = 47.5$ లేదా $a = 62.5$ ఎన్నుకోవచ్చు. ఇప్పుడు $a = 47.5$ అని ఎన్నుకొందాము.

రెండవ సోపానంలో ప్రతి x_i నుండి a యొక్క దూరము $(x_i - a)$ ను కనుగొందాము. దీనిని విచలనము d_i గా సూచిస్తాము.

i.e., $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$ ను కనుగొనుట

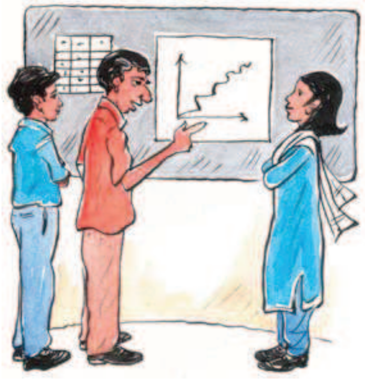
మూడవ సోపానంలో d_i మరియు వాటి సంబంధిత పౌనఃపున్యం (f_i) ల లబ్దాన్ని మరియు $f_i\, d_i$ ల యొక్క మొత్తాన్ని కనుగొంటాము. ఈ గణనలు క్రింది పట్టికలో చూపబడ్డాయి.

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి చిహ్నం (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$ $x_i = a$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5 (a)	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
మొత్తం	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

పై పట్టిక నుండి విచలనాల సగటు $\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

ఇప్పుడు, $\bar{d}$ మరియు $\bar{x}$ ల మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొందాం !

d_i ని పొందడానికి మనకు ప్రతి 'x_i' నుండి 'a' ను తీసివేసినాము. అందువల్ల సగటు ($\bar{x}$) ను పొందడానికి 'a' ను $\bar{d}$ కి కూడవలసిన అవసరం ఉన్నది. దీనిని గణితపరంగా క్రింది విధంగా వివరించనైనది.



విచలనాల సగటు, $\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

అందువల్ల $\bar{d} = \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$

$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$

$= \bar{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$

$= \bar{x} - a$

$\bar{d} = \bar{x} - a$

$\therefore \quad \bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

పట్టికలోని a, $\sum f_i d_i$ మరియు $\sum f_i$ ల విలువలను, పై సూత్రములో ప్రతిక్షేపించగా

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

$\therefore$ విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల సగటు = 62.

పైన చర్చించబడిన విధానాన్ని "విచలన పద్ధతి"(Deviation Method) లేదా "ఊహించిన సగటు పద్ధతి"(Assumed Mean Method) అంటారు.

కృత్యము

ఉదాహరణ-1లోని దత్తాంశములోని x_i యొక్క వరుస విలువలు అనగా 17.5, 32.5, ...లను ఊహించిన సగటులుగా తీసుకొని "అంకగణిత సగటు"ను గణన చేయండి. ఇపుడు ఈ క్రింది వానిని గూర్చి చర్చించండి.

1. పై సందర్భాలలో వివిధ పద్ధతుల్లో కనుగొనబడిన అంకగణితసగటు విలువలు సమానమేనా?
2. ఒకవేళ మనం వాస్తవ సగటునే, ఊహించిన సగటుగా తీసుకుంటే అపుడు $\sum f_i d_i$ విలువ ఎంత?
3. ఒక తరగతి మధ్యవిలువ (class mark) ను "ఊహించిన సగటు" గా తీసుకోవడానికి కారణమేమిటి?

ప్రక్క పేజీలో ఇవ్వబడిన పట్టికలోని '4' వ నిలువు వరుసలోని విలువలను గమనించగా, ఆ విలువలన్నీ 15 యొక్క గుణిజాలే. అందువల్ల ఒకవేళ మనం 4వ నిలువు వరుసలోని విలువలను 15 చే భాగించగా, మనకు ఆ విలువలు చిన్న సంఖ్యలలో వస్తాయి. అపుడు ఆ విలువలను f_i తో గుణించడం సులభం (ఇక్కడ, 15 అనేది తరగతి అంతరం లేదా 4వ నిలువు వరుసలోని విలువలయొక్క గ.సా.కా.).

అందువల్ల, $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ గా తీసుకుంటాము, ఇచ్చట a ఊహించిన సగటు మరియు h అనేవి తరగతి అంతరం.

పై విధంగా, u_i విలువలను వరుసగా కనుగొనాలి. (i. e., $f_i u_i$ కనుగొనాలి తరువాత $\sum f_i u_i$ విలువను కనుగొనాలి). $h = 15$ గా తీసుకొని (సాధారణంగా తరగతి పొడవును "h"గా తీసుకుంటాం. కాని h అనేది ప్రతీ సందర్భంలో తరగతి పొడవు కానవసరం లేదు).

అందువల్ల, $\bar{u} = \dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

తరగతి అంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్య విలువ (x_i)	$d_i = x_i - a$	$u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	-30	-2	-4
25-40	3	32.5	-15	-1	-3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
మొత్తం	$\sum f_i$=30			$\sum f_i u_i$=29	

ఇచ్చుట, మరలా $\bar{u}$ మరియు $\bar{x}$ మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొందాం.

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} \quad \text{మరియు}$$

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \quad \text{అని మనకు తెలుసు.}$$

అందువల్ల $$\bar{u} = \frac{\sum f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}\right\}$$

$$= \frac{1}{h}(\bar{x} - a)$$

లేదా $$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

$\therefore$ $$\bar{x} = a + h\left\{\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right\}$$

లేదా
$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

పై సమీకరణంలో, $\sum f_i u_i$ మరియు $\sum f_i$ విలువలను పట్టిక నుండి తీసుకొని ప్రతిక్షేపించగా

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \frac{29}{30}$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

అందువల్ల, విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల సగటు = 62.

పైన చర్చించబడిన పద్ధతిని "సంక్షిప్త విచలన పద్ధతి" లేదా "సోపానవిచలన పద్ధతి" అంటారు.

గమనించినది :

- ఒకవేళ d_i లకు ఉమ్మడి కారణాంకాలు ఉంటే, సోపాన విచలన పద్ధతి అనేది వినియోగించడానికి అనుకూలమైన పద్ధతి.
- పై మూడు పద్ధతుల ద్వారా కనుగొనబడిన సగటు విలువ ఒకటే.
- ఊహించిన సగటు పద్ధతి మరియు సోపాన - విచలన పద్ధతులు అనేవి ప్రత్యక్ష పద్ధతి యొక్క సులభతరం చేయబడిన పద్ధతులు మాత్రమే.
- ఒకవేళ a మరియు h విలువలు పైవిధంగా ఇవ్వనప్పటికినీ, శూన్యేతర సంఖ్యలు అయి $\bar{x} = a + h\bar{u}$ అనే సూత్రము వ్యవస్థితం అవుతుంది. ఎందుకనగా $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

ఈ పద్ధతులను మరికొన్ని ఉదాహరణలకు అనువర్తింపజేద్దాం.

ఉదాహరణ-2. భారతదేశములోని వివిధ రాష్ట్రాలు మరియు కేంద్రపాలిత ప్రాంతాలకు చెందిన గ్రామీణ ప్రాంత ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో గల మహిళ ఉపాధ్యాయుల శాతముల వివరములు ఈ క్రింది పట్టికలో పొందుపరచబడినాయి. పై మూడు పద్ధతులనుపయోగించి మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతాన్ని కనుక్కోండి.

మహిళా ఉపాధ్యాయులశాతం	15 - 25	25 - 35	35 – 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 – 85
రాష్ట్రాలు లేదా కేంద్రపాలిత ప్రాంతాల సంఖ్య	6	11	7	4	4	2	1

(*NCERT* వారు నిర్వహించిన 7వ అఖిలభారతీయ పాఠశాల విద్యా సర్వే గణాంకాల ప్రకారం)

సాధన : తరగతి మధ్యవిలువ x_i కనుగొని, దానిని పట్టికలో పొందుపరుచుదాం.

ఇచ్చట $a = 50,\ h = 10,$

అపుడు $d_i = x_i - 50$ మరియు $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

ఇపుడు మనము d_i మరియు u_i విలువలను కనుగొని పట్టికలో పొందుపరచగా

మహిళా ఉపాధ్యాయుల శాతం	రాష్ట్రాల/కేంద్ర పాలితప్రాంతాల సంఖ్య	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ $f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$	
15 – 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 – 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 – 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 – 55	4	50	0	0	200	0	0
55 – 65	4	60	10	1	240	40	4
65 – 75	2	70	20	2	140	40	4
75 – 85	1	80	30	3	80	30	3
మొత్తం	35				1390	-360	-36

పై పట్టిక నుండి, $\sum f_i = 35, \sum f_i x_i = 1390, \sum f_i d_i = -360, \sum f_i u_i = -36$.

ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ఊహించిన సగటు పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

సోపాన విచలన పద్ధతి ద్వారా $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

$\therefore$ గ్రామీణ ప్రాంత ప్రాథమిక పాఠశాలల్లో గల మహిళా ఉపాధ్యాయుల సగటు శాతము = 39.71.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

1. పై మూడు పద్ధతుల ద్వారా సాధించబడిన ఫలితము ఒకటేనా ?
2. ఒక వేళ x_i మరియు f_i లు చాలినంత చిన్నగా ఉంటే, అపుడు ఏ పద్ధతిని ఎన్నుకోవడం అనుకూలమైనది?
3. ఒక వేళ x_i మరియు f_i ల విలువలు పెద్ద సంఖ్యలు అయినపుడు ఏ పద్ధతి సరియైన పద్ధతి?

ఒకవేళ తరగతి పొడవులు వేరువేరుగా ఉన్ననూ మరియు x_i విలువలు పెద్ద సంఖ్యలు అయినప్పటికినీ d_i ల యొక్క సామాన్య కారణాంకాన్ని h గా తీసుకొని, సంక్షిప్త విచలన పద్ధతిలో సగటు కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ-3. వన్‌డే క్రికెట్ ఆటలో బౌలర్లు సాధించిన వికెట్ల వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో చూపించనైనది. సరియైన పద్ధతిని ఎంచుకొని బౌలర్లు సాధించిన సగటు వికెట్లను కనుగొనుము. ఇట్టి సగటు యొక్క ప్రాముఖ్యత ఏమిటి?

వికెట్ల సంఖ్య	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 – 450
బౌలర్ల సంఖ్య	7	5	16	12	2	3

సాధన : ఇచ్చట తరగతి పొడవులు వేరువేరుగా ఉన్నాయి, మరియు x_i విలువలు పెద్దవిగా ఉన్నాయి. అయినప్పటికీ సగటు కనుగొనడానికి సంక్షిప్త విచలన పద్ధతినే ఎంచుకుందాము; ఇచ్చట $a = 200$ మరియు $h = 20$.

వికెట్ల సంఖ్య	బౌలర్ల సంఖ (f_i)	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ $(h = 20)$	$f_i u_i$
20 – 60	7	40	-160	-8	-56
60 – 100	5	80	-120	-6	-30
100 – 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 – 250	12	200 (a)	0	0	0
250 – 350	2	300	100	5	10
350 – 450	3	400	200	10	30
మొత్తం	45				-106

అందువల్ల $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$

$\therefore$ 45 మంది బౌలర్లు వన్డే క్రికెట్‌లో సాధించిన వికెట్ల సగటు = 152.89.

తరగతిగది ప్రాజెక్టు :

1. మీ పాఠశాలలో ఇటీవల నిర్వహించిన పరీక్షల్లో, గణితంలో మీ తరగతి విద్యార్థులు సాధించిన మార్కుల వివరాలను సేకరించండి. దీనికి వర్గీకృత పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికను తయారుచేయండి. అదేవిధంగా మిగతా విషయాలకు సంబంధించిన మార్కుల వివరాలకు కూడా పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలను తయారు చేయండి. ప్రతివిషయానికి సంబంధించిన సగటును తగు పద్ధతి ద్వారా కనుగొని, ఆ విలువలను పోల్చుము.

2. మీ పట్టణం / గ్రామంలో 30 రోజుల్లో నమోదు అయిన "గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతలు" వివరాలను సేకరించండి. ఇట్టి దత్తాంశాన్ని వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో చూపండి. అదేవిధంగా ఇట్టి దత్తాంశానికి, సరియైన పద్ధతిని ఎంచుకొని సగటు కనుగొనండి.

3. మీ తరగతి లోని విద్యార్థుల యొక్క ఎత్తులను కొలిచి, అట్టి సమాచారానికి వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను తయారుచేయుము. తగు పద్ధతిని ఎంచుకొని ఇట్టి దత్తాంశమునకు సగటు కనుగొనుము.

అభ్యాసము - 14.1

1. ఒక గ్రామంలో కొంతమంది విద్యార్థుల జట్టు 'పర్యావరణ పరిరక్షణ–అవగాహన' అనే కార్యక్రమంలో భాగంగా, 20 ఇండ్లలో సర్వేనిర్వహించి, ఎన్నెన్ని మొక్కలు నాటినారో సమాచారాన్ని సేకరించి, ఈ క్రింది పట్టికలో నమోదు చేసినారు. సగటున ఒక ఇంటికి ఎన్నిమొక్కలు నాటినారో కనుక్కోండి.

మొక్కల సంఖ్య	0 - 2	2 - 4	4 – 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 – 14
ఇండ్ల సంఖ్య	1	2	1	5	6	2	3

2. ఒక కర్మాగారంలోని 50 మంది కార్మికుల దినసరి భత్యము ఈక్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడినవి

దినసరిభత్యము (₹)	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400– 450
కార్మికుల సంఖ్య	12	14	8	6	10

తగు పద్ధతిని ఎంచుకొని ఆ కర్మాగారంలోని కార్మికుల సగటు భత్యమును కనుక్కోండి.

3. ఒక ఆవాసప్రాంతంలో పిల్లల రోజువారి చేతి ఖర్చులు (pocket allowance) వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వనైనది. పిల్లల సగటు చేతి ఖర్చు ₹ 18 అయిన క్రింది పట్టికలో లోపించిన పౌనఃపున్యం (f)ను కనుగొనుము.

పిల్లల రోజువారి చేతిఖర్చు (₹)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
పిల్లల సంఖ్య	7	6	9	13	f	5	4

4. ఒక వైద్యశాలలో వైద్యులు 30 మంది స్త్రీలకు వైద్య పరీక్షలు నిర్వహించి, వారి యొక్క హృదయ స్పందనలను క్రింద చూపిన పట్టికలో క్రోడీకరించారు. తగు విధానాన్ని ఎంచుకొని ఇట్టి స్త్రీల యొక్క హృదయస్పదనల సరాసరి (ఒక నిమిషానికి) కనుక్కోండి.

హృదయస్పందనలసంఖ్య/నిమిషం	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
స్త్రీల సంఖ్య	2	4	3	8	7	4	2

5. పండ్ల మార్కెట్‌లో, పండ్ల వ్యాపారులు నారింజపండ్లను పెట్టెలలో ఉంచి అమ్ముతారు. ఒక్కొక్క పెట్టెలో ఉండే 'నారింజపండ్ల' సంఖ్య వేరువేరుగా ఉంటుంది. పెట్టెల్లోని నారింజపండ్ల పంపకాన్ని ఈ క్రింది పట్టికలో చూపనైనది.

నారింజపండ్ల సంఖ్య	10-14	15–19	20-24	25-29	30–34
పెట్టెల సంఖ్య	15	110	135	115	25

ఒక్కొక్క పెట్టెలో ఉండే నారింజపండ్ల సగటు కనుక్కోండి. సగటు కనుగొనుటకు ఏ పద్ధతిని ఎంచుకుంటారో తెల్పండి.

6. ఒక ఆవాసప్రాంతంలోని 25 కుటుంబాల సంబంధించిన దినసరి భోజన ఖర్చుల వివరాలను ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వనైనది.

దినసరిభోజనఖర్చు (₹)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
కుటుంబాల సంఖ్య	4	5	12	2	2

తగు పద్ధతిని ఎంచుకొని ఒక్క కుటుంబానికి అయ్యే సగటు భోజన ఖర్చును కనుక్కోండి.

7. ఒక పట్టణంలోని 30 నివాసప్రాంతాలలో, గాలిలో గల SO_2 యొక్క గాఢత (in parts per million, i.e., ppm), ను ఈ క్రింది పట్టికలో క్రోడీకరించనైనది.

SO_2 యొక్క గాఢత (in ppm)	0.00-0.04	0.04-0.08	0.08-0.12	0.12-0.16	0.16-0.20	0.20-0.24
పౌనఃపున్యము	4	9	9	2	4	2

గాలిలో గల సగటు SO_2 గాఢతను కనుక్కోండి.

8. ఒక తరగతి ఉపాధ్యాయుడు ఒక టర్మ్‌లో తన తరగతికి చెందిన 40 మంది విద్యార్థుల హాజరు వివరాలను, ఈ క్రింది చూపిన పట్టికలో చూపనైనది. ఈ టర్మ్‌లో ఒక విద్యార్థి సగటు హాజరు ఎంత?

రోజుల సంఖ్య	35-38	38-41	41-44	44-47	47-50	50-53	53-56
విద్యార్థుల సంఖ్య	1	3	4	4	7	10	11

9. 35 పట్టణాలకు సంబంధించి అక్షరాస్యత రేటు (శాతములలో) ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వనైనది. సగటు అక్షరాస్యతా రేటును కనుక్కోండి.

అక్షరాస్యతరేటు (%)	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
పట్టణాల సంఖ్య	3	10	11	8	3

14.3 బాహుళకము (MODE)

ఇవ్వబడిన పరిశీలనల్లో లేదా రాశులలో ఎక్కువసార్లు పునరావృతం అయ్యే రాశిని "బాహుళకము" అంటారు.

వర్గీకృత దత్తాంశానికి "బాహుళకాన్ని" కనుగొనే విధానం నేర్చుకునే ముందుగా మనం అవర్గీకృత దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని కనుగొను విధానాన్ని ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా నేర్చుకుందాం.

ఉదాహరణ-4. 10 క్రికెట్ మ్యాచ్ లలో ఒక బౌలర్ తీసిన వికెట్లు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి. 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3. ఈ దత్తాంశానికి 'బాహుళకాన్ని' కనుక్కోండి.

సాధన : దత్తాంశములోని అంకెలను (రాశులను) ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చగా అనగా 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6

పై దత్తాంశంను పరిశీలించగా, ఎక్కువ మ్యాచుల్లో బౌలర్ '2' వికెట్లను తీసినట్లుగా స్పష్టంగా తెలియుచున్నది. (అనగా 3 సార్లు). అందువల్ల ఇవ్వబడిన దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము 2.

ఇవి చేయండి

1. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.
   a) 5, 6, 9, 10, 6, 12, 3, 6, 11, 10, 4, 6, 7.
   b) 20, 3, 7, 13, 3, 4, 6, 7, 19, 15, 7, 18, 3.
   c) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6.
2. బాహుళకము ఎల్లప్పుడు దత్తాంశమునకు మధ్యలో ఉంటుందా?
3. ఉదాహరణ-4లోని దత్తాంశానికి మరొక రాశిని చేర్చగా బాహుళకము మారుతుందా? వ్యాఖ్యానించండి.
4. ఒకవేళ ఉదాహరణ-4లోని రాశులలోని గరిష్ఠవిలువ '8' కి మారిన, దాని ప్రభావం, అట్టి దత్తాంశం యొక్క బాహుళకంపై ఉంటుందా? వ్యాఖ్యానించుము.

వర్గీకృత పౌనఃపున్యవిభాజనానికి (వర్గీకృత దత్తాంశానికి), పౌనఃపున్యాలను పరిశీలించి "బాహుళకము" కనుగొనడం సాధ్యం కాదు. ఇచట మనం గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం ఉన్న ఒక తరగతిని మాత్రం సూచించగలం, అట్టి తరగతిని బాహుళక తరగతి (modal class) అంటారు. బాహుళక తరగతిలో ఉండే ఒక విలువ మరియు దీనిని క్రింది సూత్ర సహాయమున లెక్కించవచ్చును.

$$\text{బాహుళకము} = l+\left(\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right)\times h$$

ఇచ్చుట, l = బాహుళక తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు

h = బాహుళక తరగతి పొడవు

f_1 = బాహుళక తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

f_0 = బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

f_2 = బాహుళక తరగతికి తరువాత నున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము.

ఈ సూత్రాన్నుపయోగించి బాహుళకమును కనుగొనే విధానాన్ని ఈ క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలించుదాం.

ఉదాహరణ-5. ఒక ఆవాస ప్రాంతంలో కొంత మంది విద్యార్థుల బృందం. 20 కుటుంబాలను సర్వేచేసి, కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్యను ఈ క్రింద చూపిన పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికలో చూపనైనది.

కుటుంబపరిమాణం	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
కుటుంబాల సంఖ్య	7	8	2	2	1

ఈ దత్తాంశానికి 'బాహుళకాన్ని' కనుక్కోండి.

సాధన : ఇచ్చుట, గరిష్ఠ తరగతి పౌనఃపున్యము 8, ఈ పౌనఃపున్యానికి సంబంధించిన తరగతి 3-5. అందువల్ల బాహుళక తరగతి 3-5.

ఇపుడు,

బాహుళక తరగతి = 3-5, మధ్యంతర తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు (l) = 3, తరగతి పొడవు (h) = 2

బాహుళక తరగతి పౌనఃపున్యము (f_1) = 8,

బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము (f_0) = 7,

బాహుళక తరగతికి తరువాత నున్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము (f_2) = 2.

పై విలువలను, ఈ క్రింది సూత్రములో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$$\text{బాహుళకం} = l+\left(\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right)\times h$$

$$= 3+\left(\frac{8-7}{2\times 8-7-2}\right)\times 2 = 3+\frac{2}{7} = 3.286$$

$\therefore$ పై దత్తాంశం యొక్క బాహుళకము 3.286.

ఉదాహరణ--6. ఒక తరగతిలో 30 మంది విద్యార్థులు ఒక గణిత పరీక్షలో పొందిన మార్కులు పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టిక ఈ క్రింది నీయబడినది. ఈ దత్తాంశానికి 'బాహుళకము'ను కనుగొనుము. అదేవిధంగా బాహుళకము మరియు సగటులను పోల్చి, వ్యాఖ్యానించుము.

తరగతిఅంతరం	విద్యార్థుల సంఖ్య (f_i)	తరగతి మధ్యవిలువ (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
మొత్తం	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860$

సాధన : దత్తాంశములోని ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు (7గురు) '40-55' తరగతి అంతరంలోని మార్కులు సాధించియున్నారు. కనుక '40-55' అనేది బాహుళక తరగతి అవుతుంది.

మధ్యంతర తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు (l) = 40,

తరగతి పొడవు (h) = 15,

బాహుళక తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము (f_1) = 7,

బాహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి పౌనఃపున్యము (f_0) = 3,

బాహుళక తరగతికి తరువాత నున్న పౌనఃపున్యము (f_2) = 6.

$$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{2 \times 7 - 6 - 3}\right) \times 15 = 40 + 12 = 52$$

వ్యాఖ్యానం (Interpretation) : పైదత్తాంశానికి బాహుళకము 52 ; అదేవిధంగా సగటు 62 (ఉదాహరణ-1, ద్వారా) అని తెలియుచున్నది. అనగా తరగతిలోని 52 మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు ఎక్కువ మంది ఉన్నారని, ఒక్కొక్క విద్యార్థి యొక్క సగటు మార్కులు 62.

ఆలోచించి చర్చించి రాయండి.

1. సందర్భాన్ని బట్టి మనము తరగతిలోని విద్యార్థుల అందరి సరాసరి మార్కులు, లేక ఎక్కువమంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు కనుగొంటాము.
   a. మొదటి సందర్భంలో మనం ఏ కేంద్రీయస్థానపు విలువను కనుక్కొంటాం?
   b. రెండవ సందర్భంలో మనం ఏ కేంద్రీయస్థానపు విలువను కనుక్కొంటాం?
2. వేరువేరు తరగతి అంతరాలు గల దత్తాంశమునకు కూడా 'బాహుళకము'ను కనుగొనవచ్చునా?

అభ్యాసం - 14.2

1. ఒక సంవత్సరకాలంలో, ఒక వైద్యశాలలో చేరిన రోగుల యొక్క వయస్సుల వివరాలు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినాయి.

వయస్సు (సం॥లలో)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
రోగుల సంఖ్య	6	11	21	23	14	5

పై దత్తాంశానికి సగటు మరియు బాహుళకాలను కనుగొనుము. అదేవిధంగా అట్టి కేంద్ర స్థాన విలువలను పోల్చి వ్యాఖ్యానించుము.

2. ఈ క్రింది పట్టికలో 225 విద్యుత్ పరికరాల జీవితకాల (గంటలలో) వివరాలు ఇవ్వబడినాయి.

జీవితకాలం (గంటలలో)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
పౌనఃపున్యం	10	35	52	61	38	29

పై విద్యుత్ పరికరాల జీవితకాల బాహుళకాన్ని కనుగొనుము.

3. ఒక గ్రామంలోని 200 కుటుంబాల యొక్క నెలసరి ఖర్చుల వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. అట్టి కుటుంబాల నెలసరి ఖర్చుల బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి. అదేవిధంగా నెలసరి సరాసరి ఖర్చును కనుక్కోండి.

నెలసరి ఖర్చు (రూపాయలలో)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
కుటుంబాల సంఖ్య	24	40	33	28	30	22	16	7

4. రాష్ట్రాల వారిగా సెకండరీ పాఠశాలల్లో గల ఉపాధ్యాయ – విద్యార్థి నిష్పత్తి విలువలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వనైనది. ఇట్టి దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని మరియు సగటును గణించండి. మరియు ఈ రెండు కేంద్రస్థాన విలువల పై వ్యాఖ్యానించుము.

విద్యార్థుల సంఖ్య	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
రాష్ట్రాల సంఖ్య	3	8	9	10	3	0	0	2

5. వన్‌డే క్రికెట్ మ్యాచుల్లో ప్రపంచంలో అత్యున్నతశ్రేణి బ్యాట్స్‌మెన్‌లు సాధించిన పరుగుల వివరాలను ఈ క్రింది పౌనఃపున్యవిభాజన పట్టికలో ఇవ్వనైనది.

పరుగులు	3000-4000	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000
బ్యాట్స్‌మెన్‌ల సంఖ్య	4	18	9	7	6	3	1	1

పై దత్తాంశమునకు బాహుళకాన్ని కనుగొనుము.

6. ఒక విద్యార్థి, రోడ్డుపై ఒక స్థానం నుంచి వెళ్ళుచున్న కార్ల సంఖ్యను ప్రతి మూడు నిమిషాలకు ఒకసారి (1 పీరియడ్), 100 పీరియడ్‌లలో లెక్కించి, వివరాలను ఈ క్రింది పట్టికలో క్రోడీకరించాడు.

కార్ల సంఖ్య	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
పౌనఃపున్యం	7	14	13	12	20	11	15	8

పై దత్తాంశానికి "బాహుళకాన్ని" కనుక్కోండి.

14.4 వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము (MEDIAN)

'మధ్యగతము' అనేది కేంద్రస్థాన విలువలు (Measure of central tendency)లో ఒకటి, ఇది ఇవ్వబడిన దత్తాంశములోని రాశుల లేదా పరిశీలనాంశాల యొక్క 'మధ్యవిలువ'ను ఇస్తుంది. అవర్గీకృత దత్తాంశానికి 'మధ్యగతా'న్ని కనుగొనే విధానాన్ని ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం. అవర్గీకృత దత్తాంశానికి 'మధ్యగతం'ను కనుగొనుటకు, ముందుగా దత్తాంశంలోని రాశులను లేదా పరిశీలనాంశాలను 'ఆరోహణక్రమం'లో అమర్చుకోవాలి.

అపుడు, ఒకవేళ రాశులసంఖ్య 'n' బేసి సంఖ్య అయితే, మధ్యగతము అనేది $\left(\frac{n+1}{2}\right)$వ రాశి లేదా పరిశీలనాంశము అవుతుంది.

ఒకవేళ, 'n' సరిసంఖ్య అయితే 'మధ్యగతం' అనేది $\left(\frac{n}{2}\right)$వ రాశి మరియు $\left(\frac{n}{2}+1\right)$వ రాశుల సరాసరి అవుతుంది.

ఒక పరీక్షలో 50 గరిష్ఠమార్కులకు, 100 మంది విద్యార్థులు సాధించిన మార్కులను క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. ఇట్టి దత్తాంశమునకు 'మధ్యగతాన్ని' ఎలా కనుగొనాలో గమనిద్దాము.

సాధించిన మార్కులు	20	29	28	33	42	38	43	25
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	28	24	15	2	4	1	20

మొదట, మనం మార్కులను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చి, పౌనఃపున్యపట్టికను ఈ క్రింది విధంగా తయారుచేయాలి.

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (పౌనఃపున్యము)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
మొత్తం	100

ఇచ్చట $n = 100$, అది ఒక సరిసంఖ్య అపుడు మధ్యగతము $\left(\frac{n}{2}\right)$వ రాశి మరియు మొత్తం $\left(\frac{n}{2}+1\right)$వ రాశుల సరాసరి అవుతుంది. అనగా, 50 వ రాశి 51వ రాశిల సరాసరి అవుతుంది.

ఈ మధ్యమ విలువల స్థానమును కనుగొనుటకు మనము 'ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను' రాస్తాము.

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచిత పౌనఃపున్యము
20	6	6
25 వరకు	6 + 20 = 26	26
28 వరకు	26 + 24 = 50	50
29 వరకు	50 + 28 = 78	78
33 వరకు	78 + 15 = 93	93
38 వరకు	93 + 4 = 97	97
42 వరకు	97 + 2 = 99	99
43 వరకు	99 + 1 = 100	100

ఇపుడు మనం ఈ సమాచారం ఆధారంగా పౌనఃపున్యపట్టికకు మరో నిలువు వరుసను; కలపడం ద్వారా వచ్చే నూతన పట్టికను సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికగా పేర్కొందాము.

పై పట్టిక నుండి క్రింది విషయాలు మనం సులభంగా గమనించవచ్చు.

50 వ పరిశీలనాంశం 28 (ఎందుకు?)

51 వ పరిశీలనాంశం 29

$$\text{మధ్యగతము} = \frac{28+29}{2} = 28.5$$

గమనిక : పై పట్టికలోని 1వ మరియు 3వ నిలువ వరుసలను కలిపి సంచితపౌనఃపున్యపట్టిక అంటాం. 'మధ్యగత మార్కులు 28.5' అనేది 50% మంది విద్యార్థులకు 28.5 మార్కుల కంటె తక్కువగాను 50% మంది విద్యార్థులకు 28.5 మార్కుల కంటె ఎక్కువ వచ్చాయనే విషయాల్ని తెల్పుతుంది..

ప్రక్క పట్టికలోని వర్గీకృత దత్తాంశంలో ఒక పరీక్షలో 100 మార్కులకు గాను 53 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులు ఇవ్వబడ్డాయి

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0-10	5
10-20	3
20-30	4
30-40	3
40-50	3
50-60	4
60-70	7
70-80	9
80-90	7
90-100	8

ఈ పట్టిక ఆధారంగా క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలను చెప్పే ప్రయత్నం చేద్దాం.

10 కంటె తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత? 5 మంది అని మనకు స్పష్టంగా తెలుసు. మరి 20 కంటె తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంతో చెప్పండి?

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (సంచితపౌనఃపున్యం)
10 కంటె తక్కువ	5
20 కంటె తక్కువ	5 + 3 = 8
30 కంటె తక్కువ	8 + 4 = 12
40 కంటె తక్కువ	12 + 3 = 15
50 కంటె తక్కువ	15 + 3 = 18
60 కంటె తక్కువ	18 + 4 = 22
70 కంటె తక్కువ	22 + 7 = 29
80 కంటె తక్కువ	29 + 9 = 38
90 కంటె తక్కువ	38 + 7 = 45
100 కంటె తక్కువ	45 + 8 = 53

20 కంటె తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులలో; 0-10 మార్కులు పొందినవారు, 10-20 మార్కులు పొందిన వారు కూడ కలిసి ఉంటారు. కాబట్టి 20 కంటె తక్కువ మార్కులు పొందినవారు 5 + 3 అనగా 8 మంది విద్యార్థులు. అందువల్ల మనం 10-20 అనే తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం 8 గా చెప్పవచ్చు. అదేవిధంగా మనం మిగిలిన తరగతుల యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యాలను కూడా కనుగొన వచ్చును. అంటే 30 మార్కుల కంటె తక్కువ మార్కుల పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను; 40 మార్కుల కంటె తక్కువ .... 100 మార్కుల కంటె తక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనవచ్చును.

ఈ పట్టికను 'ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం విభాజన పట్టిక' అంటాము. ఇక్కడ 10, 20, ..., 100 లు వరుస తరగతుల యొక్క ఎగువ హద్దులు అవుతాయి.

పైన చెప్పిన విధంగా 0గాని అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారి సంఖ్య (ఇది తరగతులన్నింటి పౌనఃపున్యాల మొత్తానికి సమానం), 10 లేదా అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందినవారి సంఖ్య ఇది పై మొత్తంలో నుంచి మొదటి తరగతి పౌనఃపున్యం తీసివేయగా వచ్చినది), 20 లేదా అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారి సంఖ్య (ఇది తరగతులన్నింటి పౌనఃపున్యాల మొత్తంలో నుంచి మొదటి రెండు తరగతుల పౌనఃపున్యాల మొత్తాన్ని తీసివేయగా వచ్చినది), ఈ విధంగా పట్టికను తయారు చేయవచ్చు.

సాధించిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (సంచితపౌనఃపున్యం)
0 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	48 + 5 = 53
10 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	45 + 3 = 48
20 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	41 + 4 = 45
30 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	38 + 3 = 41
40 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	35 + 3 = 38
50 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	31 + 4 = 35
60 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	24 + 7 = 31
70 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	15 + 9 = 24
80 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	8 + 7 = 15
90 గాని అంతకంటె ఎక్కువ	8

'0' కంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన వారు 53 మంది ఉన్నారని పరిశీలించవచ్చు. 0–10 తరగతిలో 5గురు విద్యార్థులున్నారు. కాబట్టి 10 గాని

అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య = 53–5=48గా నిర్ధారించవచ్చు. ఇదేవిధంగా 20 గాని అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య 48 – 3 = 45 అవుతుంది. అలాగే 30 గాని అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్య 45–4=41 అవుతుంది. ఇదేవిధంగా ప్రక్క పట్టికలో చూపించినట్లు 90 గాని, అంతకంటె ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనవచ్చు.

ఈ పట్టికను 'అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం విభాజన పట్టిక' అంటాము. ఇక్కడ 0, 10, 20, ..., 90 లు వరుస తరగతుల యొక్క దిగువ హద్దులు అవుతాయి.

ఇప్పుడు వర్గీకృతక దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతాన్ని కనుగొనడంలో ఈ సంచితపౌనఃపున్య విభాజనపట్టిక నుండి ఏదైనా ఒక దానిని ఉపయోగించు కోవచ్చు.

వర్గీకృత దత్తాంశంలో సంచిత పౌనఃపున్యపట్టికల నుండి మధ్య విలువ అనేది ఏదో ఒక తరగతి అంతరంలోని ఒక విలువ అవుతుంది. కాబట్టి ఈ మొత్తం విభాజనమును రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించే తరగతిలోని ఒక మధ్యవిలువను మనం కనుగొనాల్సి ఉంటుంది. కాని అది ఏ తరగతి అవుతుందో ఎలా కనుగొనడం? ఈ తరగతి కనుగొనడానికి మనం $\frac{n}{2}$ విలువను మరియు అన్ని తరగతుల యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యాలు కనుగొంటాము. తర్వాత ఏ తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం $\frac{n}{2}$ ను మొదటిసారి అధిగమిస్తుందో ఆ తరగతిని మధ్యగత తరగతిగా గుర్తిసాము.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53

పై విభాజనమునందు $n = 53$. కావున $\frac{n}{2} = 26.5$.

26.5 కన్నా ఎక్కువైన కనీస సంచిత పౌనఃపున్యంగల తరగతి 60-70. దీనిని మధ్యగత తరగతి అంటారు.

సంచిత పౌనఃపున్యం 29. ($\frac{n}{2} = 26.5$. కంటె కొంచెం పెద్దది)

ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును క్రింది సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొంటాము.

మధ్యగతము $$M = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

ఇందులో l = మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు

n = దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య

cf = మధ్యగత తరగతికి ముందు తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యము

f = మధ్యగత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము

h = మధ్యగత తరగతి పొడవు

పట్టిక నుండి $\frac{n}{2} = 26.5,\ l = 60, cf = 22,\quad f = 7,\quad h = 10$

పై విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

మధ్యగతము $$= 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{6}\right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

$\therefore$ తరగతిలోని సగం మంది విద్యార్థులకు 66.4 కన్నా తక్కువ మార్కులు మిగిలిన సగం మంది విద్యార్థులకు 66.4 కన్నా ఎక్కువ మార్కులు వచ్చి ఉంటాయి..

ఉదాహరణ-7. ఒక పాఠశాలలోని 10వ తరగతి బాలికల ఎత్తు గురించి చేసిన సర్వేఫలితాలు ప్రక్క పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. వారి ఎత్తుల మధ్యగతము కనుగొనండి.

ఎత్తు (సెం.మీలలో)	బాలికల సంఖ్య
140 కన్నా తక్కువ	4
145 కన్నా తక్కువ	11
150 కన్నా తక్కువ	29
155 కన్నా తక్కువ	40
160 కన్నా తక్కువ	46
165 కన్నా తక్కువ	51

సాధన : మధ్యగతము కనుగొనుటకు మొదట తరగతి అంతరాలను, వాటి సంబంధిత పౌనఃపున్యములను కనుగొన వలెను. ఇచ్చిన విలువలు ఎగువ హద్దు కన్నా తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్యములు కావు, ఎత్తులు 140, 145, 150, . . ., లు ఎగువ హద్దులు, అనగా తరగతి అంతరాలు 140 కన్నా తక్కువ, 140 - 145, 145 - 150 . . . అవుతాయి.

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యము	సంచిత పౌనఃపున్యము
140 కన్నా తక్కువ	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

పట్టికను పరిశీలిస్తే 140 కన్నా తక్కువ పొడవు గల బాలికల సంఖ్య 4 అనగా 140 కన్నా తక్కువ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము 4. 145 సెం.మీ కన్నా తక్కువ పొడవు గల వారు 11 మంది. అనగా 140-145 తరగతి పౌనఃపున్యం 11 – 4 = 7 . ఇదేవిధంగా మిగిలిన పౌనఃపున్యములను లెక్కించవచ్చు.

దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య $n = 51, \quad \frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$

దత్తాంశంలోని 25.5 వ రాశి 145 - 150 తరగతికి చెందుతుంది.

$\therefore$ 145 - 150 మధ్యంతర తరగతి.

మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు $l = 145,$

మధ్యగత తరగతికి ముందు తరగతి సంచితపౌనఃపున్యం $cf = 11,$

మధ్యగత తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము $f = 18,$

మధ్యగత తరగతి పొడవు $h = 5.$

సూత్రమును ఉపయోగించి మధ్యగతం $= l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

∴ బాలికల పొడవుల యొక్క మధ్యగతము 149.03 సెం.మీ అనగా తరగతిలో 50% మంది బాలికలు 149.03 సెం.మీ కన్నా ఎక్కువ పొడవు కలిగి ఉంటారు. మిగిలిన 50% మంది 149.03 సెం.మీ. కన్నా తక్కువ పొడవు కలిగి ఉంటారు.

ఉదాహరణ-8. క్రింది దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము 525 మరియు దత్తాంశం లోని రాశుల మొత్తం 100 అయిన x, y విలువలను కనుగొనండి. (పట్టికలో CI అనగా తరగతి అంతరం, Fr అనగా పౌనఃపున్యం)

CI	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

సాధన :

దత్తాంశంలోని రాశుల సంఖ్య $n = 100$ అని ఇవ్వబడింది.

$\therefore$ $76 + x + y = 100$, i.e., $x + y = 24$ (1)

మధ్యగతం 525 అను రాశి 500 – 600 తరగతికి చెందుతుంది.

కావున, $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

సూత్రము ఉపయోగించి

$$\text{మధ్యగతము} = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$525 = 500 + \frac{50 - 36 - x}{20} \times 100$$

$$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

$$25 = 70 - 5x$$

$$5x = 70 - 25 = 45$$

$$\therefore \quad x = 9$$

సమీకరణం (1)నుండి $9 + y = 24$

$$\therefore \quad y = 15$$

తరగతి అంతరం	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7+x$
300-400	12	$19+x$
400-500	17	$36+x$
500-600	20	$56+x$
600-700	y	$56+x+y$
700-800	9	$65+x+y$
800-900	7	$72+x+y$
900-1000	4	$76+x+y$

గమనిక : వేరువేరు తరగతి అంతరాలు గల దత్తాంశమునకు కూడా ఇదే సూత్రమును ఉపయోగించి మధ్యగతమును కనుగొనవచ్చు.

14.5 వివిధ కేంద్రీయస్థాన విలువలు – ప్రత్యేక సందర్భములు

అంకమధ్యమము దత్తాంశములోని అన్ని రాశుల విలువలను (అత్యల్ప, అత్యధిక విలువలు కూడా) పరిగణనలోనికి తీసుకొంటుంది. కనుక అంకమధ్యమమును అత్యంత విశ్వసనీయమైన కేంద్రీయస్థాన విలువ అంటారు. దీనిని ఉపయోగించి రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ రాశులు లేక విభాజనములను సులభముగా పోల్చవచ్చును. ఉదాహరణకు రెండు పాఠశాలలోని విద్యార్థుల పరీక్షా ఫలితాల సరాసరులు కనుగొని పోల్చడం ద్వారా ఏ పాఠశాల సమర్థవంతంగా పనిచేస్తున్నది అని చెప్పవచ్చును.

కొన్ని దత్తాంశములలోని అంత్యవిలువలు అంకమధ్యమంపై ఎక్కువ ప్రభావం చూపుతాయి. సాధారణంగా పౌనఃపున్యాలన్నీ దాదాపు సరిసమానంగా ఉన్న తరగతులతో కూడిన దత్తాంశము యొక్క అంకమధ్యమము ఆ దత్తాంశమునకు సరియైన ప్రాతినిధ్య విలువ అవుతుంది. కానీ ఒక తరగతి పౌనఃపున్యం 2, మిగిలిన పౌనఃపున్యాలు 20, 5, 20, 21, 18. అయినప్పుడు అంకమధ్యమము సరియైన ప్రాతినిధ్య విలువ కాదు.

దత్తాంశములోని విడివిడి రాశులు, ప్రత్యేకంగా అంత్యమ రాశుల విలువలకు, ప్రాముఖ్యత లేనప్పుడు దత్తాంశమునకు ప్రాతినిధ్య విలువను కనుగొనవలసి వచ్చినప్పుడు, ఉదాహరణకు ఒక ప్రాంతములోని అందరు శ్రామికుల వేతనములకు ప్రాతినిధ్య విలువ కనుగొనవలసి వచ్చినప్పుడు (మిగిలిన రాశుల కన్నా ఎక్కువ భేదంతో అత్యల్ప, అత్యధిక విలువలుగల రాశులున్నప్పుడు) మధ్యగతమును అనువైన కేంద్రీయ స్థాన విలువగా తీసుకొంటారు.

పలుమార్లు పునరావృతమగు, బహు ప్రాముఖ్యముగల రాశులను గుర్తించవలసిన సందర్భములలో బాహుళకమును కేంద్రీయస్థాన విలువగా గణిస్తారు. ఉదాహరణకు ఎక్కువ మంది వీక్షించే టెలివిజన్ ప్రోగ్రాము కనుగొనుటకు, ఎక్కువ అమ్మకము గల వస్తువు కనుగొనుటకు ఎక్కువ మంది ఉపయోగించు వాహనము రంగు కనుగొనుటకు బాహుళకం ఉపయోగిస్తారు.

EXERCISE - 14.3

1. ఒక ఆవాస ప్రాంతములోని 68 మంది వినియోగదారుల యొక్క నెలసరి విద్యుత్ వినియోగం క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. ఈ దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములను కనుగొని వానిని పోల్చండి.

నెలవారి వినియోగం(యూ)	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
వినియోగదారుల సంఖ్య	4	5	13	20	14	8	4

2. క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన 60 రాశుల మధ్యగతం 28.5 అయిన x, y విలువలు కనుగొనుము.

తరగతిఅంతరం	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
పౌనఃపున్యము	5	x	20	15	y	5

3. ఒక జీవిత భీమా సంస్థ ఉద్యోగి, పాలసీదారుల వయస్సులను బట్టి తయారు చేసిన విభాజన పట్టిక క్రింద ఇవ్వబడింది. పాలసీదారుల వయస్సుల మధ్యగతం కనుగొనండి. [18 సంవత్సరముల నుండి 60 సంవత్సరముల వయస్సు గల వారికి మాత్రమే పాలసీలు ఇస్తారు]

వయస్సు (సం॥)	20 కన్నా తక్కువ	25 కన్నా తక్కువ	30కన్నా తక్కువ	35 కన్నా తక్కువ	40కన్నా తక్కువ	45కన్నా తక్కువ	50 కన్నా తక్కువ	55కన్నా తక్కువ	60 కన్నా తక్కువ
పాలసీదారుల సంఖ్య	2	6	24	45	78	89	92	98	100

4. ఒక చెట్టు యొక్క 40 ఆకుల పొడవులు దగ్గర మి.మీ వరకు కొలిచి తయారు చేసిన క్రింది పట్టిక నుండి వాని పొడవులు మధ్యగతము కనుగొనండి.

ఆకు పొడవు (మి.మి)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	172-180
ఆకుల సంఖ్య	3	5	9	12	5	4	2

(**సూచన :** మధ్యగతము లెక్కించుటకు తరగతి హద్దులు నిర్మించవలెను)

5. ఒక పరిశీలనలో 400 నియాన్ బల్బుల జీవితకాలం క్రింది విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

జీవితకాలం (గంటలలో)	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
బల్బుల సంఖ్య	14	56	60	86	74	62	48

బల్బుల జీవితకాలములకు మధ్యగతము కనుగొనండి.

6. ఒక టెలిఫోను డైరక్టరీ నుండి యాదృచ్ఛికంగా 100 ఇంటిపేర్లను తీసుకొన్నారు. వాటిలోని అక్షరాల సంఖ్యను బట్టి క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనము తయారు చేయబడినది.

అక్షరాల సంఖ్య	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
ఇంటిపేర్ల సంఖ్య	6	30	40	16	4	4

ఇంటిపేర్లలోని అక్షరాల సంఖ్యకు అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములను కనుగొనండి.

7. క్రింది విభాజన పట్టికలో 30 మంది విద్యార్థుల బరువులు ఇవ్వబడ్డాయి. వారి బరువుల మధ్యగతము కనుగొనండి.

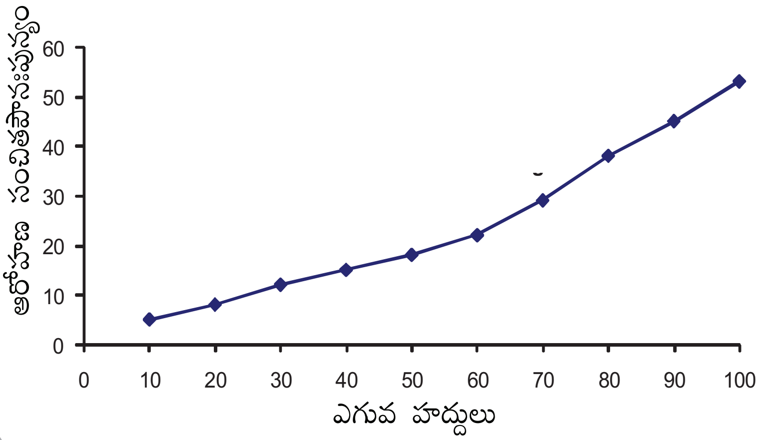
భారము(కి.గ్రా)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	3	8	6	6	3	2

14.6 సంచిత పౌనఃపున్యముల రేఖాచిత్రములు

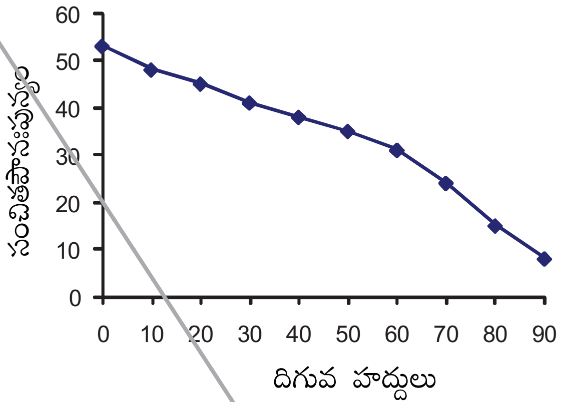
పదాల కన్నా పటాలు ఎక్కువ అవగాహన కల్పిస్తాయి అని విదితమేకదా. రేఖా చిత్రాలు దత్తాంశమును సమగ్రంగా, శీఘ్రంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఉపయోగపడతాయి. కమ్మీ చిత్రాలు, సోపాన చిత్రాలు, పౌనఃపున్య బహుభుజి మరియు వక్రము ల గురించి క్రింది తరగతులలో చర్చించి ఉన్నాము. సంచిత పౌనఃపున్యములకు రేఖాచిత్రములు నిర్మించుట గురించి చర్చిద్దాము.

ఈ రేఖా చిత్రముల కొరకు ఉదాహరణ 6లోని దత్తాంశమును తీసుకొందాం. దీనికొరకై దత్తాంశంలోని తరగతులు అవిభాజక తరగతులై ఉండాలి. (సంచిత పౌనఃపున్యములు తరగతి హద్దులతో సంబంధం కలిగి ఉంటాయి) అవధులతో కాదు.

దత్తాంశములోని వరుస తరగతుల యొక్క ఎగువ హద్దులు 10, 20, 30, 100 అని గమనించండి. అనువైన స్కేలును తీసుకొని X-అక్షముపై ఎగువ హద్దులను, Y-అక్షముపై సంచిత పౌనఃపున్యము లను గుర్తించండి. ప్రతి తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు, దానికి సంబంధించిన సంచిత పౌనఃపున్యములతో ఏర్పడు హద్దులను (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) లను గ్రాఫు తలంపై గుర్తించి, ఆ బిందువులను సరళ వక్రంతో కలపండి. ఈ వక్రమును ఆరోహణ సంచితపౌనఃపున్య వక్రము లేక ఓజీవ్ వక్రము అంటారు.



‘ ఒజీ ’ అనే ఫ్రెంచి పదమునుండి ‘ఓజీవ్’ అను పదము తయారైనది. ఒజీ అనగా పుటాకార వక్రంగా మొదలై కుంభాకార వక్రంగా అంతమయ్యే ఆకారము, దాదాపు ఆంగ్ల అక్షరం ‘S’ వంటి ఆకారం. **14, 15** శతాబ్దములలో గోతిక్ పద్ధతి నిర్మాణములలో ఇది ఒక ప్రముఖమైన ఆకారము.



మరలా అవరోహణ సంచితపౌనఃపున్య వక్ర నిర్మాణం గురించి పరిశీలిద్దాము. పై దత్తాంశములోని తరగతుల దిగువ హద్దులు 0, 10, 20, ..., 90 అని గమనించండి. అనువైన స్కేలును తీసుకొని X-అక్షము పై దిగువ హద్దులను, Y-అక్షముపై సంచితపౌనఃపున్యములను గుర్తించాలి. ప్రతి తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు. దానికి సంబంధించిన అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యముల యొక్క క్రమయుగ్మాలు (0, 53), (10, 48), (20, (45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8) లను గ్రాఫ్ తలముపై గుర్తించి ఒక సరళ వక్రముతో కలుపవలెను. ఈ వక్రమును ‘అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము’ లేక ‘ఓజీవ్ వక్రము’ అంటారు.

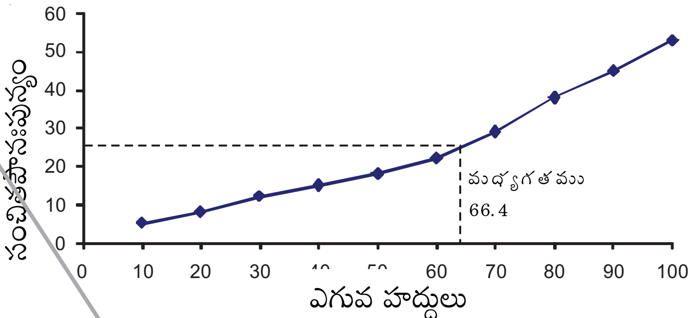
14.6.1 ఓజీవ్ వక్రము నుండి మధ్యగతము కనుగొనుట

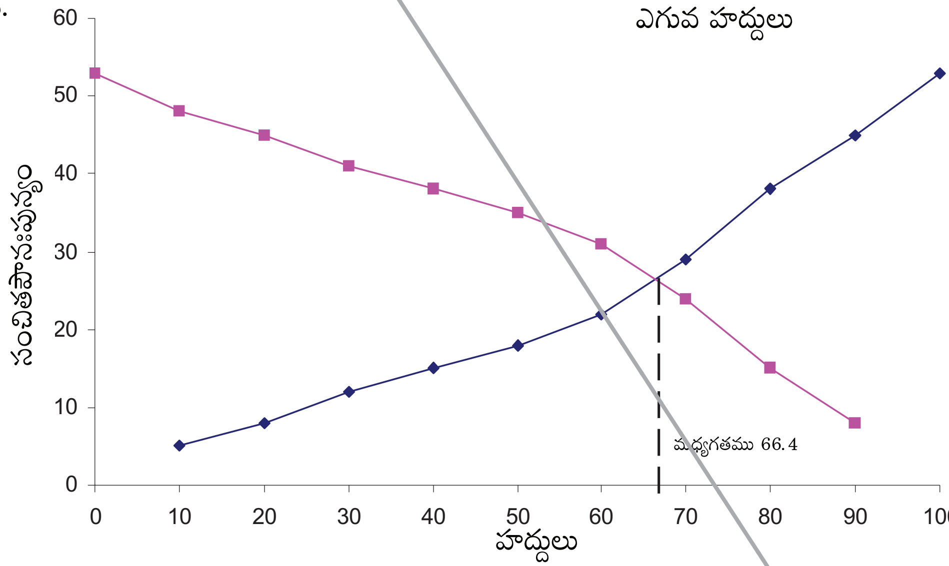
ఓజీవ్ వక్రము నుండి ఆ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము కనుగొనగలమా? పరిశీలిద్దాము.

ఆరోహణ లేక అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రముయొక్క Y−అక్షముపై మొదట $\frac{n}{2}$ వ రాశి(ఈఉదాహరణలో $\frac{n}{2}=\frac{53}{2}=26.5$)ని సూచించు బిందువును గుర్తించాలి. ఈ బిందువు నుండి x-అక్షమునకు సమాంతరముగా ఒక రేఖ గీచి అది వక్రమును ఖండించు బిందువును గుర్తించాలి. ఈ బిందువు నుండి x-అక్షం మీదకు ఒక లంబమును గీచినచో, ఆ లంబపాదము మధ్యగతమును సూచిస్తుంది. ప్రక్క రేఖాచిత్రములను పరిశీలించండి.

ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి :

ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క ఆరోహణ, అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను నిర్మించి, రెండు ఓజీవ్ వక్రముల ఖండన బిందువు నుండి x-అక్షము మీదకు ఒక లంబమును గీయగా, ఆ లంబపాదము దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును సూచిస్తుంది.



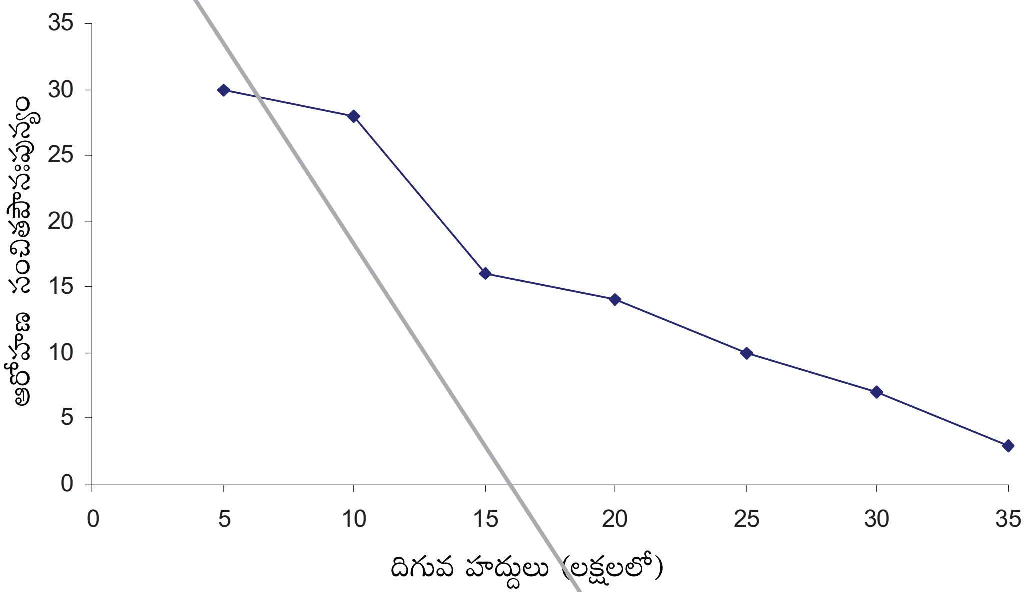


ఉదాహరణ -9. ఒక ప్రాంతములోని 30 అంగళ్ళ యొక్క సంవత్సర ఆదాయములు క్రింది పట్టిక రూపంలో ఇవ్వబడ్డాయి.

లాభము(లక్ష ₹)	అంగళ్ళ సంఖ్య
5 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	30
10 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	28
15 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	16
20 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	14
25 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	10
30 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	7
35 కన్నా ఎక్కువ లేక సమానం	3

పై దత్తాంశమునకు రెండు ఓజీవ్ వక్రాలు గీయండి. అందు నుండి లాభముల యొక్క మధ్యగతము కనుగొనండి.

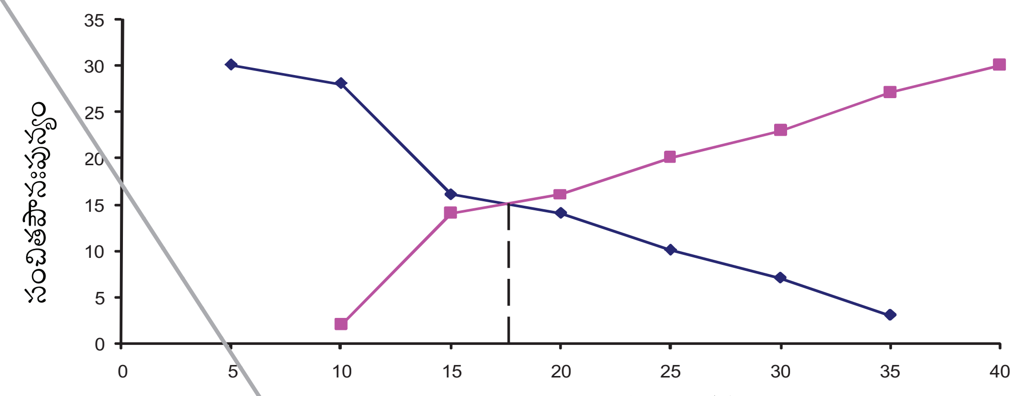
సాధన : ఇచ్చిన దత్తాంశములోని విలువలు దిగువ హద్దులు, సంబంధిత అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములు. వీటితో మొదట అవరోహసంచిత పౌనఃపున్య వక్రము గీయుటకు అనువైన స్కేలు తీసుకొని x-అక్షము పై దిగువ హద్దులను, Y-అక్షముపై సంచిత పౌనఃపున్యములను గుర్తించి వాటిని కలుపుతూ సరళ వక్రమును గీయాలి. ఇది అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము అవుతుంది.



ఇప్పుడు ఇచ్చిన దత్తాంశము నుండి తరగతి అంతరాలు, పౌనఃపున్యములు, ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను తయారు చేయగా

తరగతి అంతరాలు	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
అంగళ్ళ సంఖ్య	2	12	2	4	3	4	3
ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం	2	14	16	20	23	27	30

పై దత్తాంశమునుండి ఏర్పడు బిందువులు (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) బిందువులను అదే గ్రాఫ్‌పై గుర్తించి సరళ వక్రముతో కలుపగా ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము ఏర్పడుతుంది. ఈ రెండు వక్రములు పరస్పరం ఖండించుకొన్న బిందువు నుండి x-అక్షం మీదకు లంబమును గీయగా, ఆ లంబపాదము 17.5 అని గుర్తించవచ్చు. అనగా దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము 17.5 లక్షల రూపాయలు.



అభ్యాసము - 14.4

1. 50 మంది శ్రామికుల దినసరి భత్యములు క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనములో ఇవ్వబడ్డాయి.

దినసరి(₹ లలో)	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
శ్రామికుల సంఖ్య	12	14	8	6	10

ఈ దత్తాంశమనకు ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములను తయారు చేసి, ఓజీవ్ వక్రము గీయండి.

2. ఒక పాఠశాలలో జరిగిన వైద్య పరీక్షలలో తరగతిలోని 35 మంది విద్యార్థులు బరువులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

బరువు (కి.గ్రా)	విద్యార్థుల సంఖ్య
38 కన్నా తక్కువ	0
40 కన్నా తక్కువ	3
42 కన్నా తక్కువ	5
44 కన్నా తక్కువ	9
46 కన్నా తక్కువ	14
48 కన్నా తక్కువ	28
50 కన్నా తక్కువ	32
52 కన్నా తక్కువ	35

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము గీచి దాని నుండి మధ్యగతమును గుర్తించండి. ఈ దత్తాంశమునకు సూత్ర సహాయంతో మధ్యగతము కనుగొని రెండు విలువలు సరిచూడండి.

3. ఒక గ్రామములోని 100 మంది రైతులు పొలములలో హెక్టారుకు దిగుబడి ధాన్యము క్రింది విభాజనము నందు ఇవ్వబడింది.

ధాన్యం దిగుబడి (క్వింటాల్/టాక్టర్)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
రైతుల సంఖ్య	2	8	12	24	38	16

ఈ దత్తాంశమునకు అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము తయారు చేసి ఓజీవ్ వక్రము గీయండి.

మనం ఏమి చర్చించాం

1. ఒక వర్గీకృత విభాజనము యొక్క అంకమధ్యమము లెక్కించుటకు సూత్రాలు

   (i) ప్రత్యక్ష పద్ధతి : $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

   (ii) విచలన పద్ధతి : $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

   (iii) సంక్షిప్త విచలన పద్ధతి : $\bar{x} = a + \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

2. వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు బాహుళక సూత్రము:

   $$\text{బాహుళకము} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

3. వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు మధ్యగతము

   $$\text{మధ్యగతము} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

4. మధ్యగతము కనుగొనుటకు తరగతి హద్దులు ఉపయోగించాలి.

5. ఆరోహణ, అవరోహణ సంచితపౌనఃపున్య వక్రములు గీయుట గురించి తెలుసుకొన్నాము.

6. ఓజీవ్ వక్రాలు గ్రీయుటలో X-అక్షముపై హద్దులను, Y-అక్షముపై సంచిత పౌనఃపున్యములను తీసుకొనవలెను.

7. రెండు అక్షములపై తీసుకొను స్కేలు సమానంగా ఉండనవసరం లేదు.

8. ఒకే దత్తాంశము యొక్క రెండు ఓజీవ్ వక్రాలు పరస్పరం ఖండించుకొన్న బిందువు నుండి X-అక్షం మీదికి గీచిన లంబపాదము ఆ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతమును తెలుపుతుంది.